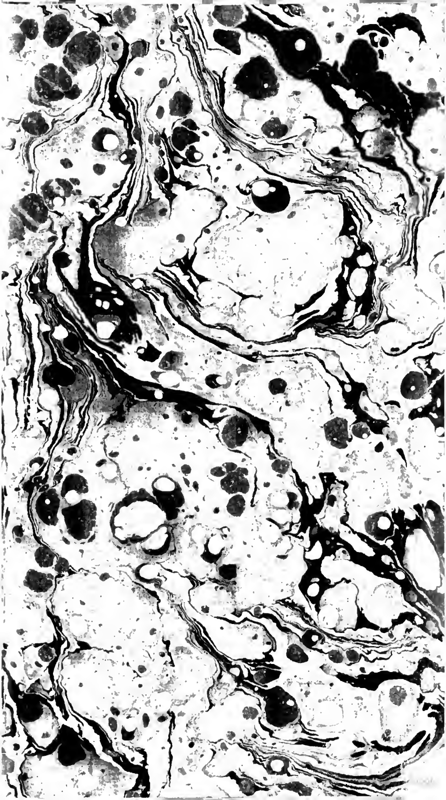
EX MUNIFICENTIA
FERDINANDI III. M. E. D.
DIE 3. IUNII 1791.



9. 6. 273 bis

9 G. 6 273 Bis

Digitized by Google

# COMPENDIARIA MATHESEOS INSTITVTIO

QVAM IN VSVM

AVDITORVM PHILOSOPHIAE

ELVCVBRATVS EST

PAVLVS MAKO E S. I.

In Coll. Reg. Thereſ. Prof. Math. et Phyſ. Experim.

EDITIO ALTERA

*ab Autore emendata.*




VINDOBONAE,
TYPIS IOANNIS THOMAE DE TRATTNERN,
CAES. REG. AVLAE TYPOGR. ET BIBLIOP.
MDCCLXVI.

# MONITVM
## AD LECTOREM.

*Quanquam in hoc libro ea duntaxat contineantur, quae proprie ad Elementa pertinent; tamen in his ipſis occurrent fortaſſe quaedam, in quibus tirones aliis praeterea ſtudiis occupati adhaereſcant. Ea, quae huiusmodi eſſe nobis viſa ſunt, ita pertractauimus, vt iis praetermiſſis ceterorum connexiones non omnino turbentur. Praetermitti igitur poterunt numeri ſequentes: 89, 127, 132, 133, etc. vſque ad finem cap. IV. Item 229, 230, 235,*

*236, 634, 665, et qui conſequuntur vſque ad finem ſecundi capitis. Denique 684, et reliqui omnes vſque ad finem capitis tertii. Quod ad partitionem libri attinet curauimus equidem, vt naturae ordinem ſequeremur: ſicubi tamen demonſtrationum forma ſimplicior aliud poſtulare viſa eſt, ab eodem nonnihil deflectere religioni nequaquam duximus, praeſertim cum hac ipſa in re primi ſubſellii Mathematicos autores haberemus.*

# ELEMENTA ALGEBRAE.

## PROLEGOMENON.

I.

*Quantitas* adpellatur quaeuis magnitudo, quae additione augeri, vel ablatione minui poteſt. E. g. numeri, lineae, pondera, velocitates etc. cum augeri, ac minui poſſint, quantitates ſunt.

2. Scientia, quae de quantitatibus abſtracte, ac generatim agit, *Algebra* dicitur.

Scholion. Sunt qui Algebrae vocabulum deriuent a praefixo articulo *al*, et nomine autoris

*Geber*, qui primus in Arabia ſcientiam hanc excogitarit: ſunt qui deducant a praeſtanti artis huius valore, quem Arabes *gabir* adpellant.

3. Quantitates ab omni ſubiecta materia abſtractae minoribus alphabeti literis $a$, $b$, $c$, etc. ſolent deſignari; et cognitae quidem primoribus $a$, $b$, $c$, $d$: incognitae poſtremis $x$, $y$, $z$. Saepe tamen memoriae adiuuandae cauſſa adhibentur primae literae earum vocum, quibus quantitates ipſae deſignantur; e. g. tempus repraeſentatur litera $t$, ſpatium litera $s$, celeritas litera $c$, et ita porro.

4. COROLL. 1. Cum ergo quantitas generatim ſumta exprimat omnem magnitudinem, quae augeri, vel minui poteſt (1) literae alphabeti omnem magnitudinem, e. g. numeros, lineas, pondera etc. deſignare poſſunt: vt adeo quae in Algebra de literis hisce demonſtrantur, ea in quauis quantitatum ſpecie locum habeant.

5. COROLL. 2. Vnde adparet Algebram eſſe ſcientiam quamdam vniuerſalem, quae praeclaros habeat vſus in omnibus iis diſciplinis, in quibus certae quantitatum ſpecies, e. g. numeri, lineae, ſpatia, tempora, celeritates, vires, pondera etc. pertractantur.

SCHOLION. Perſaepe animaduerti Algebrae tirones in ipſa quantitatum abſtractarum notatione adhaereſcere, neque ſatis intelligere, quid literae $a$, $b$, $c$, $x$, $y$ ſibi velint. Nimirum quemadmodum notae 1, 2, 3 ſignificant quamcunque vnitatem, binarium, ternarium; ita literae illae denotant quamlibet quantitatem: et ſicuti in Arithmetica, ſeu in numerorum tractatione nihil determinati, non ſtellas, non pecunias, non homines intel-

ligimus, ſed numeros ab omni ſubiecta materia abſtrahimus; ita quum literis in calculo vtimur per has nullam quantitatem determinate, non numeros, non lineas, non ſpatia, ſed quamuis generatim magnitudinem incrementi, ac decrementi capacem deſignamus. Quemadmodum ergo notae numerorum, priusquam ad certam materiam determinentur, ſignificant quaſuis res numerabiles; ita plane literae, antequam ad certum aliquod quantitatum genus, e. g. ad numeros, lineas, pondera, celeritates etc. adplicentur, vniuerſe denotant omnes quantitates.

6. Quantitas quaelibet vel eſt *poſitiua*, ſeu maior nihilo; vel eſt *negatiua*, ſeu minor nihilo: vt adeo nihilum ſit quaſi limes quidam quantitatum poſitiuarum, et negatiuarum. Illae deſignantur ſigno + praefixo, quod initio fere omiſſum ſemper ſubauditur; hae ſigno —, quod ſemper expreſſe ponitur. Signa vero iſta hunc in modum enunciantur: $a + b$, *a plus b*; $c - d$, *c minus d*.

Scholion. Sedulo curandum eſt, vt tironum animis clara, ac diſtincta quantitatis negatiuae notio ingeneretur. Qui aureos centum poſſidet nec quidquam debet, aurei hi comparate ad illum ſunt quantitas poſitiua cum eos poſſidendo plus nihilo habeat: at ſi alteri tantundem debeat, dicetur habere nihil, cum debitum omnem illam pecuniam velut exſtinguat. Sin autem non modo nihil habeat, ſed inſuper creditori debeat aureos centum, hi comparate ad illum ſunt quantitas negatiua, cum totidem aurei deſiderentur, vt exſoluto creditore nihil habere cenſeatur. Vnde quidquid ſupra nihilum eſt, poſitiuum dicitur: quidquid ad

nihilum deſideratur, negatiuum adpellatur. Similiter ſi motus cuiuſpiam hominis verſus orientem referatur, paſſus, quos in eandem plagam facit, poſitiui ſunt, quia verſus ortum re vera progreditur: at ſi volens ad orientem progredi, verſus occaſum regrediatur, motus contrarius, ſeu regreſſus in occaſum comparate ad orientem negatiuus eſt; vt enim homo ille regrediens in quiete, ſeu nullo verſus orientem motu perſtare intelligatur, neceſſe eſt, vt viam relegendo tantundem motum poſitiuum verſus orientem faciat, quantum antea verſus occidentem fecit. Sicuti autem debitum illud eſt reapſe aliquid, et regreſſus iſte in occaſum eſt verus motus, ita quantitas negatiua re vera eſt quantitas, non merum nihil, ſed quae comparate ad certam hypotheſim negatiua ſit. Hinc generatim ſigna + et — ſemper contrario ſenſu ſunt accipienda: vt ſi + ſignificet

Surſum, prorſum, lucrum, incrementum, ſupra, ante, acceſſum etc. — deſignet

Deorſum, retrorſum, damnum, decrementum, infra, poſt, receſſum etc. et ſi + poſtrema haec denotet, — priora illa ſignificet.

7. Signum = deſignat aequalitatem earum quantitatum, inter quas interferitur: vt ſi ſit $a = b$, ſignificat quantitatem $a$ aequalem eſſe quantitati $b$. Signum $>$ oſtendit quantitatem anteriorem maiorem eſſe poſteriore; at ſignum $<$ denotat eandem minorem eſſe ſequente. Sic $a > b$ ſignificat quantitatem $a$ maiorem eſſe, quam $b$: $3 < 5$ oſtendit numerum tertium minorem eſſe quinto. Signum $\infty$ exprimit infinitatem; hinc

ſicubi occurrat $a = \infty$, argumento eſt quantitatem $a$ infinitae eſſe magnitudinis.

8. Dum quantitas poſitiua ſigno $+$ interiecto alteri adiungitur, id ſignum denotat illam alteri addi: quum vero negatiua quantitas alteri cum ſigno — adnectitur, ſignum illud ablationem indicat. E. g. $a + b$ ſignificat quantitatem $b$ ad $a$ adiungi; $a - b$ eandem ab $a$ tolli, ſeu quantitatem $a$ quantitate $b$ multari. Vnde $a + b$ exprimit quantitatum $a$ et $b$ *ſummam*; $a - b$ earundem *differentiam*.

9. COROLL. 1. Quoniam addere, ac demere contraria ſunt, patet quantitatem poſitiuam adiuncta aequali negatiua aequari nihilo. E. g. $a - a, -a + a, 3 - 3, -3 + 3$ aequantur nihilo.

10. COROLL. 2. Hinc ſi quantitas alterutra maior fuerit, minor e maiore ſemper tantum deſtruit, quanta eſt ipſa minor. Sic $5 - 3 = 2$; $3 - 8 = -5$.

11. Quantitas, quae e pluribus ſigno $+$ vel — iunctis conſurgit, *complexa* dicitur, vel *polynomia*, ipſae vero illae quantitates ſigno coniunctae *termini* adpellantur: e. g. $ab - c + 2d$ eſt quantitas complexa trium terminorum: quae autem non conſtat quantitatibus eiusmodi ſigno connexis *incomplexa*, aut *monomia* vocatur, vt $a$, vel $3ab$, vel $-2cd$. Speciatim vero quantitas polynomia duorum terminorum *binomia*, trium *trinomia* etc. nuncupatur. E. g. $ab + cd$ eſt quantitas binomia, $a + b - 2cd$ trinomia.

12. COROLL. Valor quantitatis complexae non mutatur, quo demum cunque ordine ſcriban-

tur termini eundem componentes. Neque enim mutatur valor totius, niſi mutato valore partium, quem ſola ordinis permutatione non mutari perſpicuum eſt. Hinc $a + b - c = a - c + b = b + a - c = - c + a + b = - c + b + a$.

13. Numeri, de quibus iam tractabimus, tribus modis poſſunt literis adiungi. Nam vel 1) iunguntur iis interiecto ſigno + aut —, vt $a - b + 5$: vel 2) praefiguntur literis nullo ſigno interpoſito, vt $4ab$: vel 3) a dextris ſurſum verſus iisdem adſcribuntur, vt $a^3$.

14. Numeri literis nullo interiecto ſigno praefixi adpellantur earum *coefficientes*, afficiuntque totum terminum, cui praefiguntur, ac indicant, quoties ille terminus poſitus ſit: e. g. $3ab$ ſignificat terminum $ab$ ter eſſe poſitum. Sicubi autem deſit coefficiens, illic vnitas praefixa intelligitur, cum eiusmodi terminus ſemel tantum poſitus ſit.

15. Coroll. Eſt ergo $3ab = ab + ab + ab$; et $- 5a = - a - a - a - a - a$. Vnde adparet expreſſionem per coefficientes eſſe methodum compendiariam ſcribendi easdem quantitates aliquoties ſibi additas.

16. Numeri a dextris ſurſum verſus literis adiecti ſunt earum literarum, quibus adiiciuntur, *exponentes*, afficiuntque eam ſolum literam, cui a dextris iunguntur, ac indicant, quoties vnitas per eam literam ſit multiplicata, ſeu quoties ea litera multiplicatione ſit poſita. E. g. $a^3$ ſignificat vnitatem per $a$ ter eſſe multiplicatam, ſeu quantitatem $a$ ter eſſe multiplicatione poſitam.

Sicubi vero deſit exponens, illic vnitas adiecta intelligitur, cum per talem quantitatem vnitas ſemel duntaxat ſit multiplicata.

17. Coroll. Interdum in exponentibus numerorum loco literae minuſculae adhibentur, aut literae numeris permiſtae, vt in his $ab^m$, $a^{2n}b$; $a^{m+2}$, $ab^{n-1}$.

Scholion. Caueat diligenter tiro, ne exponentes confundat cum coefficientibus, putetque eſſe $a^2 = 2a$: $a^2$ ſignificat vnitatem bis eſſe per $a$ multiplicatam, ſeu quantitatem $a$ bis eſſe multiplicatione poſitam; at $2a$ denotat eandem bis eſſe poſitam additione. Ponatur $a = 7$, erit $a^2 = 49$, $2a = 14$.

18. Quantitates monomiae, ſeu termini dicuntur *ſimiles*, aut *homogenei*, ſi conſtent iisdem accurate literis, eosdemque habentibus exponentes, licet diuerſis gaudere poſſint ſignis, et coefficientibus. Sic homogeneae quantitates ſunt $3ab$; et $2ab$; item $-cb^2d$ et $+4cb^2d$: quae vero aut literas diuerſas habent, aut in iisdem literis diuerſos exponentes *heterogeneae* vocantur, vt ſunt $ab$ et $cb$, $3a^2b$ et $-ab^2$.

19. *Numerus* eſt multitudo compoſita ex vnitatibus. Nimirum quaeuis quantitas numero deſignata concipitur veluti diuiſa in partes plures aequales, quarum quaeuis ſeorſim ſpectata eſt vnitas. E. g. octo floreni ſunt determinata pecuniae quantitas, conſtans octo florenorum vnitatibus, vel vt alii adpellant monadibus.

20. Characteres, quos ad exprimendum quemuis numerum adhibemus, hi ſunt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, quorum poſtremus *zerus* dicitur,

nec quidquam ſignificat ſecundum ſe, ſed valorem duntaxat auget praecedentium, remouendo illos longius ab extremo loco, vt iam dicemus.

21. Valor autem horum characterum ex libera hominum inſtitutione pendet a loco, quo quisque poſitus eſt. Quiuis ſeorſim collocatus denotat vnitates, nempe 1 vnam, 2 duas, 3 tres etc. Si plures coniungantur, dextimus vnitates, ſecundus verſus ſiniſtram vnitatum decades, tertius centenarios, quartus millenarios etc. ſignificat. Valor proinde characterum a dextimo recedendo continenter creſcit in decuplum. Quodſi in quopiam loco nullus adſit character, illic ponitur zerus, ſeu o, vt in numero 306, in quo zerus debet occupare locum decadum, quae deſiderantur, vt ſcilicet numerus 3 centenarios valeat; nam ſi omiſſo zero ſcriberetur 36, iam 3 non centenarios ſed decades exprimeret.

22. Atque hinc elucet modus datum quemuis numerum enunciandi. Nimirum 1) numerus propoſitus a dextra inchoando diuidatur in claſſes, quarum cuilibet terni numeri attribuantur excepta ſiniſtima, quae etiam duabus, aut vna nota conſtare poteſt. 2) Poſt primam claſſem ponatur virgula inferius, poſt ſecundam virgula ſuperius, poſt tertiam iterum virgula inferius, et ſic deinceps ſemper alternando, ita tamen, vt virgulae ſuperiores ſemper vna creſcant. 3) Peracta hac partitione prima claſſis ſeu dextima ſignificabit vnitates, decades, centenarios regrediendo; ſecunda vnitates, decades, centenarios millium; tertia vnitates, decades, centenarios millionum etc. hoc eſt, claſſis ante virgulas ſuperiores milliona-

rios denotat, ante inferiores millenarios, eosque vel ſimplices, ſi nulla virgula ſuperior ſequatur; vel millenarios millionum ſi vna, bimillionum ſi duae, trimillionum ſi tres etc. virgulae ſequantur ſuperius. En exemplum:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 9 | 7, | 8 | 0 | 5'' | 3 | 1 | 0, | 0 | 0 | 2' | 4 | 5 | 3, | 2 | 0 | 4. |
| Centenarii | Decades | Vnitates | Centenarii | Decades | Vnitates | Centenarii | Decades | Vnitates | Centenarii | Decades | Vnitates | Centenarii | Decades | Vnitates | Centenarii | Decades | Vnitates |
| Millium Bimillionum | | | Bimillionum | | | Millium Millionum | | | Millionum | | | Millium | | | Simplices | | |

Numerum hunc a ſiniſtra exorſus, omiſſis zeris, qui nihil ſignificant, ſed tantum valorem notarum anteriorum augent, hunc in modum enunciabis. Nonaginta ſeptem *millia bimillionum*, octingenti quinque *bimilliones*, trecenta decem *millia millionum*, duo *milliones*, quadringenta quinquaginta tria *millia*: ducentae quatuor *vnitates*. Ratio enunciandi perſpicua eſt ex n. 21.

# SECTIO I.

## DE PRIMIS QUANTITATUM INTEGRARUM, ET FRACTARUM CALCULIS.

## CAPUT I.

### *De Additione, et Subtractione quantitatum integrarum.*

23. Quantitates iſthic ea ſolum ratione ſpectamus, quatenus augeri, vel minui poſſunt (1): quare duplex tantum calculandi genus locum in iiſdem habere poteſt; nimirum additio, per quam augentur; et ſubtractio, per quam minuuntur. Quia vero quaeuis quantitas augeri poteſt tam alterius quantitatis homogeneae, quam repetita ſuimet ipſius adiectione, duplex eſt genus additionis: nempe operatio, qua quantitati alia quantitas adiungitur, ſimpliciter vocatur *additio*; qua vero eadem quantitas vicibus repetitis poni-

tur, ſeu ſibi ipſi additur, dicitur *multiplicatio*. Similiterminui quantitas poteſt alterius quantitatis ablatione ſemel aut ſaepius facta; prior ablatio *ſubtractio*, poſterior *diuiſio* adpellatur. Verum de multiplicatione, ac diuiſione agemus in ſequentibus.

24. *Additio* eſt duarum, vel plurium quantitatum in vnum *totum*, vel *ſummam* collectio; id eſt inueſtigatio nouae cuiusdam quantitatis, quae addendis ſimul ſumtis aequalis ſit.

25. Coroll. 1. Quantitates addendas oportere eſſe homogeneas nemo non videt: neque enim lineae et pondera, aut tres ſtellae et quinque aurei cogi in vnam ſummam poſſunt; nam ea neque lineas, neque pondera, aut neque ſtellas, neque aureos poſſet ſignificare. Interdum tamen numeri heterogenei poſſunt ad eandem ſpeciem reduci, atque ita reddi homogenei, vt ſunt floreni, et groſſi, qui ad crucigeros reuocari, ac deinde in vnam ſummam coaleſcere poſſunt.

26. Coroll. 2. Si ergo additio abſque errore facta eſt, ſumma debet aequalis eſſe omnibus partibus additis ſimul ſumtis: et ſiquidem inaequalis deprehendatur, id erit indicii additionem fuiſſe vitioſam.

27. Coroll. 3. Quare dum inquiritur, vtrum additio ſine errore perfecta ſit, iſtud quaeritur, an ſumma aequalis ſit omnibus partibus additis ſimul ſumtis; ſeu ſi ſumma ponatur $= s$, partes additae $= a, b, c$, an ſit $s = a + b + c$.

28. Coroll. 4. Atqui vtrum ſit $s = a + b + c$, deprehenditur ſubtractione: ſi enim $s = a + b$, ablatis $a$ et $b$ ex $s$ nihil debet remanere; ablata parte $a$ debet remanere $b$, ablata $b$ debet remanere $a$: ſi $s = a + b + c$, ablatis ex $s$ par-

tibus *a*, *b*, *c*, nihil debet remanere; aut ablata earum quauis debent remanere duae reliquae, et ſic porro. Hinc patet ratio explorandi bonitatem additionis per ſubtractionem.

29. PROBLEMA. *Quantitates algebraicas addere.*

RESOLUTIO. Retentis ſingularum ſignis ſcribantur partes addendae infra eas, ad quas addendae ſunt, tum ductâ linea ſummam a partibus addendis ſeparante hae leges obſeruentur:

1) Termini, et ſingulae literae cuiusuis termini ſequantur alphabeti ordinem, quantum fieri poteſt, ac primum indagetur, quinam termini ſint inter ſe ſimiles (18).

2) Si quantitates homogeneae, ſeu termini ſimiles eodem ſigno afficiantur, coefficientes iis praefixi addantur in vnam ſummam retento communi ſigno, et literis cum iisdem exponentibus.

3) Si vero diuerſis ſignis afficiantur, minor coefficiens tollatur a maiore, et reſiduum cum ſigno maioris paefigatur communibus literis (10).

4) Si termini ſimiles aequales coefficientes, et ſigna contraria habeant, penitus omittantur (9).

5) Demum termini heterogenei iungantur cum ſuis ſignis absque vlla mutatione (25).

## EXEMPLA.

I.
$$\left.\begin{array}{r} 3ab - 2ac + 3d \\ 5ab - 5ac \end{array}\right\} \textit{Partes addendae}$$
$$8ab - 7ac + 3d \quad \textit{Summa.}$$

II.
$$\left.\begin{array}{r} 8ax + 3bc - 5de \\ -ax - 7bc + 2de \end{array}\right\} \textit{Pa tes addendae.}$$
$$7ax - 4bc - 3de \quad \textit{Summa.}$$

III.

III. $5ac - bd + 6cd$ } *Partes*
$- 2ac + bd - 6cd$ } *addendae.*

$3ac$] *Summa.*

IV. $2a + 8$ } *Partes*
$- 5a - 4 + 24$ } *addendae.*

$28 - 3a$] *Summa.*

30. PROBLEMA. *Numeros addere.*

RESOLUT. Additio numerorum ſimplicium regulis non eget, quiuis enim facillime peruidet $6 + 5$ eſſe $= 11$; $9 + 8 = 17$. Verum in addendis numeris compoſitis maioribus ingenii humani imbecillitas arte aliqua adiuuanda eſt. Sunt ergo in eam rem hae regulae:

1) Numeri addendi ſcribantur infra ſe inuicem hac lege, vt vnitates vnitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis etc. reſpondeant in eadem columna deorſum verſus.

2) Ducta linea tranſuerſa, ne numeri addendi confundantur cum ſumma, colligantur primum vnitates in vnam ſummam, tum decades, centenarii etc. et quaeuis ſumma ſcribatur infra eam columnam, e cuius additione collecta eſt.

3) Si ſumma vnitatum excedat 9, ſeu excreſcat in vnam, vel plures decades, ſolae vnitates, quae praeter decades adſunt (aut 0, ſi nulla adſit vnitas) ſcribantur infra vnitatum columnam, ipſae vero decades ad ſequentem columnam adiungantur (21.) Similiter ſi decadum ſumma excreſcat in vnum, vel plures centenarios, ii ad tertiam columnam referuentur, et ſic porro. Conf. exemp. 2, et 3.

4) Si numeri addendi heterogenei quidem fuerint, ad eandem tamen aliquam ſpeciem reduci poſſint, vt floreni, groſſi, crucigeri; item dies, horae, minuta, collocentur infra ſe inuicem ita, vt e. g. crucigeri crucigeris, groſſi groſſis, floreni florenis reſpondeant, et inchoando a minima ſpecie additio peragatur vt ante. Quoties autem ſumma ſpeciei minoris exaequat ſpeciem maiorem, toties ſpeciei maiori erit addenda; vt ſi ſumma crucigerorum eſſet 7, cum in ea 2 groſſi contineantur, et inſuper 1 cruciger, ſcribendus eſſet 1 cruciger, et 2 groſſi ad columnam groſſorum reſeruandi. Conf. exempl. 4.

Demonstr. Additio numerica eſt datorum numerorum in vnam ſummam collectio (24); atqui per has regulas in vnam ſummam coguntur datorum numerorum vnitates, decades, centenarii etc. ſeu omnes partes, hoc eſt ipſi dati numeri a ſuis partibus indiſtincti.

## EXEMPLA.

I.
342 } *Addendi.*
23 }
365 ] *Summa.*

II.
2501 }
932 } *Addendi.*
43 }
3476 *Summa.*

III.
235002 }
104523 } *Addendi.*
60048 }
399573 ] *Summa.*

| IV. | flor. | groſ. | cruc. | |
|---|---|---|---|---|
| | 8, | 12, | 2 | Addendi. |
| | 7, | 18, | 1 | |
| | 4, | 9, | 2 | |
| | 21, | 0, | 2 | *Summa.* |

31. Coroll. Si in columnae cuiuspiam collectione nullus ſit numerus ſcribendus, illic ponitur o, niſi quid e columna praecedente illuc translatum ſit, vt factum eſt in columna groſſorum exemp. 4. Quodſi multi numeri eſſent addendi, perturbationis vitandae cauſſa commodius perageretur additio per partes, addendo primum tres primos numeros, tum alios tres, et ſic deinceps, ac demum ſummas particulares cogendo in vnam ſummam, vt patet in adiecto exemplo.

| *Addendi.* | *Summae particulares.* | *Summa tota.* |
|---|---|---|
| 36245 | | |
| 82036 | | |
| 10500 | | |
| — | 128781 | |
| 9878 | | |
| 6369 | | |
| 896 | | |
| — | 17143 | 146912 |
| 920 | | |
| 68 | | |
| — | 988 | |

32. *Subtractio* eſt vnius quantitatis ab altera ablatio, vt innoteſcat earum differentia: ſeu eſt ſubductio partis a toto, vt cognoſcatur pars altera reſidua. Quantitas, a qua ſubtractio fit, dicitur *minuenda*: quantitas, quae ſubducitur, *ſubtrahenda*; quantitas, quae ſubtractione peracta remanet, *reſiduum*, vel *differentia*.

33. Coroll. 1. Quantitatem ſubtrahendam debere minuendae eſſe ſimilem, aut ſaltem ad eandem aliquam ſpeciem reducibilem in aperto eſt: neque enim a celeritate pondus, a 5 aureis 3 ſtellae ſubduci poſſunt; nam differentia neque celeritatem, neque pondus; item neque aureos, neque ſtellas poſſet ſignificare.

34. Coroll. 2. Si ergo ſubtractio legitime facta eſt, parte vna ablata debet praeciſe altera remanere, nec plus, nec minus: et ſiquidem plus minusue remaneat, id erit indicii ſubtractionem fuiſſe vitioſam.

35. Coroll. 3. Quare dum inquiritur, vtrum absque errore facta ſit ſubtractio, iſtud quaeritur, an reſiduum ſit praeciſe pars altera totius: ſeu ſi quantitas minuenda ponatur $= m$, ſubtrahenda $= s$, differentia $= d$, an ſit $m - s = d$.

36. Coroll. 4. Atqui vtrum ſit $m - s = d$ deprehenditur additione: ſi enim $d$ eſt praeciſe pars altera totius $m$, quae ablato $s$ remanere debet, parte $d$ ad partem $s$ addita neceſſe eſt accurate reſtitui totum $m$, cum totum quoduis ſit aequale partibus ſuis ſimul ſumtis. Quare ſicuti additio ope ſubtractionis (28), ita ſubtractio ope additionis comprobatur.

37. Problema. *Quantitates algebraicas ſubtrahere.*

Resolut. Quantitas ſubtrahenda minuendae ſubſcribatur, ductaque linea transuerſa mutentur ſigna omnia quantitatis ſubtrahendae in contraria, nempe + in —, et — in +; tum fiat additio per regulas ſuperiores (29): dabit ſumma quaeſitam differentiam.

DEMONSTR. Terminus enim ſubtrahendus vel poſitiuus, vel negatiuus eſt ( 6 ): ſi eſt poſitiuus, poſitiuum tollere idem eſt, ac tantundem negatiui addere: ergo idem eſt, ſiue poſitiuum tollatur, ſiue ex illo fiat negatiuum, et addatur. Si eſt negatiuus, negatiuum tollere idem eſt, ac tantundem poſitiui addere: ergo idem eſt, ſiue negatiuum tollatur, ſiue ex illo fiat poſitiuum, et addatur. Ergo generatim quantitates quaſcunque algebraicas ſubtrahere idem eſt, ac easdem ſignis mutatis addere.

## EXEMPLA.

I. $8ab - 7ac + 3d$ ] *Minuend.*
$5ab - 5ac$ ] *Subtr.*
$- 5ab + 5ac$ ] *mut. ſign.*
$3ab - 2ac + 3d$ ] *differ.*

II. $7ax - 4bc - 3de$ ] *Minuend.*
$8ax + 3bc - 5de$ ] *Subtr.*
$- 8ax - 3bc + 5de$ ] *mut. ſign.*
$- ax - 7bc + 2de$ ] *differ.*

III. $3ac$ ] *Minuend.*
$- 2ac + bd - bcd$ ] *Subtr.*
$+ 2ac - bd + bcd$ ] *mut. ſign.*
$5ac - bd + bcd$ ] *differ.*

IV. $28 - 3a$ ] *Minuend.*
$2a + 8$ ] *Subtr.*
$- 2a - 8$ ] *mut. ſign.*
$20 - 5a$ ] *differ.*

38. Coroll. His exemplis continentur probae additionum ſuperiorum (29). Quodſi quantitates ſubtrahendae reſtitutis ſignis priſtinis addantur differentiis, ſummae reſtituent quantitates minuendas, atque ita patebit ſubtractiones fuiſſe rite peractas (36).

39. Problema. *Numeros ſubtrahere.*

Resolut. Subtractio numerorum ſimplicium rurſus nullis eget regulis. Quiuis enim videt e. g. 8 — 5 eſſe = 3, 9 — 5 = 4. Si vero numeri occurrant compoſiti, ſubtractio hiſce regulis perficitur:

1) Numerus ſubtrahendus ſcribatur infra minuendum ea lege, quam in additione praeſcripſimus, ducaturque transuerſa linea differentiam a numero ſubtrahendo ſeparans.

2) Inchoetur ſubtractio ab vnitatibus; tum tranſeatur ad decades, centenarios etc. reſidua ſingula ſcribendo ſub linea infra illum numerum, cuius reſidua ſunt.

3) Si numerus tollendus aequalis fuerit ſuperiori, aut ſi zerus a zero ſubtrahi debeat, ponatur pro differentia zerus (9). Si ſubtrahendus tantum fuerit zerus, ponatur pro differentia totus numerus ſuperior: ſin autem ſuperior fuerit zerus, vel minor inferiore, e nota ſiniſteriore transferatur ad eum vnitas, quae valebit eo loco decadem (21): tum fiat ſubtractio e zero vel numero iam decade aucto; interim nota ſiniſterior vnitate multata ſignetur puncto, quod admoneat illam vnitate fuiſſe multatam.

4) Si vero nota illa ſiniſterior, e qua vnitas transferenda eſſet, zerus fuerit, transferatur e

nota eundem praecedente ad zerum ipſum vnitas, quae in loco zeri valebit 10 (21), vnde vnitate ad ſequentem notam traducta, in loco zeri remanebunt 9. Quodſi plures zeri in minuendo continenter occurrant, ii omnes translata vnitate a numero eosdem praecedente pari plane ratione abeunt in 9.

5) Eaedem ſunt regulae pro numeris heterogeneis ad eandem ſpeciem reducibilibus, hoc vno diſcrimine, quod vnitas a ſpecie maiore ad minorem translata non decadem, ſed tot vnitates valeat, quot ſpeciei minoris vnitates in ea continentur: e. g. 1 florenus ad locum groſſorum translatus valet 20, groſſus in loco crucigerorum valet 3. Si ſpecies minores, quae in ſubtrahendo adſunt, in minuendo deſiderentur, eae ex vnitate ſpeciei maioris faciendae erunt: e. g. ſi minuendus contineret tantum florenos 8, nullos groſſos, et crucigeros, relictis 7 florenis ex vno fieri deberent 20 groſſi; tum relictis 19 groſſis ex vno fieri 3 crucigeri, adeoque pro 8 florenis ſcribi 7 floreni, 19 groſſi, 3 crucigeri. Idem obſeruandum eſt in aliis numeris heterogeneis ad eandem ſpeciem reducibilibus.

Demonstr. Subtractio numerica eſt vnius numeri ab altero ablatio, vt innoteſcat eorum differentia (32); atqui per traditas regulas ſingulae partes numeri ſubtrahendi, ſcilicet vnitates, decades etc. auferuntur a ſingulis partibus numeri minuendi, et innoteſcit ſingularum partium differentia: totus ergo numerus ſubtrahendus aufertur

a toto minuendo, atque ita obtinetur totius a toto differentia.

# EXEMPLA.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I. | 6824 | *Minuend.* | II. | 70562 | *Minuend.* |
| | 4023 | *Subtr.* | | 9386 | *Subtr.* |
| | 2801 | *Differ.* | | 61176 | *Diff.* |

| | | |
|---|---|---|
| III. | 90005 | *Minuend.* |
| | 27837 | *Subtr.* |
| | 62168 | *Differ.* |

| | flor. | groſſ. | cruc. | |
|---|---|---|---|---|
| IV. | 36, | 8, | 1, | *Minuend.* |
| | 9, | 16, | 2, | *Subtr.* |
| | 26, | 11, | 2, | *Differ.* |

Scholion. Si differentiam vbique addideris numero ſubtrahendo, reſtituetur vbique minuendus, atque ita adparebit ſubtractiones rite fuiſſe inſtitutas (36). Vt autem additiones, et ſubtractiones heterogeneorum reducibilium peragi poſſint, neceſſe eſt ſcire, quotnam vnitates ſpeciei minoris requirantur ad efficiendam vnitatem ſpeciei maioris. En tabellam ſpecierum apud nos in frequentiore vſu poſitarum.

| | | |
|---|---|---|
| 1 florenus | = | 20 groſſis |
| 1 groſſus | = | 3 crucigeris |
| 1 dies | = | 24 horis |
| 1 hora | = | 60 minutis |
| 1 minutum | = | 60 ſecundis |
| 1 ſecundum | = | 60 tertiis |
| 1 gradus | = | 60 minutis |
| 1 minutum | = | 60 ſecundis |
| 1 ſecundum | = | 60 tertiis |

| | | |
|---|---|---|
| 1 centenarius | = | 100 libris |
| 1 libra | = | 32 ſemiunc. |
| 1 ſemiuncia | = | 4 drachmis |
| 1 libra Apoth. | = | 12 vnciis |
| 1 vncia | = | 8 drachmis |
| 1 drachma | = | 3 ſcrupulis |
| 1 ſcrupulus | = | 20 granis |
| 1 hexapeda | = | 6 pedibus |
| 1 pes | = | 12 digitis |
| 1 digitus | = | 12 lineis. |

# CAPVT II.

## *De Multiplicatione, et Diuiſione quantitatum integrarum.*

40. *Multiplicatio* eſt vnius quantitatis poſitio toties facta, quoties continetur vnitas in altera. Hinc *a* per *b multiplicare*, ſeu *a* in *b ducere* idem eſt, ac quantitatem *a* toties ponere, quoties continetur vnitas in quantitate *b*. Quantitas, quae toties ponitur, *multiplicanda*; quae ſuis vnitatibus indicat, quoties ponenda ſit, *multiplicator*: quae demum ea operatione conſurgit, *factum*, vel *productum* adpellatur, vnde multiplicanda, et multiplicator ſolent etiam communi vocabulo *factores* dici.

41. Coroll. 1. Igitur quantitas multiplicanda toties continetur in facto, quoties vnitas in multiplicatore, ſeu factum coaleſcit praeciſe ex multiplicando toties poſito, quoties eſt vnitas in multiplicatore, ſiquidem legitima ſit multiplicatio.

42. Coroll. 2. Quum ergo inquiritur, an multiplicatio rite peracta ſit, illud quaeritur, an factum praeciſe coaluerit e multiplicando toties poſito, quoties eſt vnitas in multiplicatore.

43. Coroll. 3. Atqui an factum ſic coaluerit, repetita ſubtractio oſtendit: ſi enim ita coaluit, toties ſublato multiplicando, quoties eſt vnitas in multiplicatore, factum penitus tolli, atque in nihilum redigi debet: nam quibus po-

ſitis totum aliquod coaluit, iiſdem ablatis deſtrui neceſſe eſt.

44. Multiplicatio quantitatum maxime complexarum ſaepe indicatur tantum, reapſe non peragitur. Signa autem indicatae multiplicationis ſunt crux decuſſata $\times$, aut punctum inter factores interiectum: e.g. $2 \times 3$, vel $2.3 = 6$. Factores complexi plerumque parentheſi includuntur ſigno $\times$, vel nullo interpoſito: e. g. $(a+2b-c) \times (2a-d)$, vel $(a+2b-c)$ $(2a-d)$ ſignificat priorem quantitatem per poſteriorem eſſe multiplicatam.

45. THEOREMA. *Cum duae quantitates* a *et* b *inuicem multiplicantur, idem factum naſcitur, ſiue* a *ducatur in* b, *ſiue* b *in* a.

DEMONSTR. Sint enim in recta AB tot puncta, quot ſunt in quantitate $a$ vnitates, e.g. ſex, et in recta AC tot, quot $b$ continet vnitates, e. g. quatuor. Ducere quantitatem $a$ in $b$ idem eſt, ac ſeriem punctorum AB quater ſumere; et ducere quantitatem $b$ in $a$ idem eſt, ac ſeriem punctorum AC ſexies ſumere (40): atqui vtroque in caſu idem prodit numerus punctorum ſcilicet ſpatio ABDC contentorum, in quo quatuor ſunt ſeries AB, aut ſex ſeries AC: ergo $a \times b = b \times a$. Fig. 1.

46. COROLL. 1. Eodem modo patet veritas theorematis, etſiamſi fuerint plures factores $a$, $b$, $c$ etc. Nam per demonſtrata $a \times b = b \times a$, quare ſiue illud, ſiue hoc multiplices per $c$, idem plane eſt, ſeu $a \times b \times c = b \times a \times c$. Similiter $a \times c = c \times a$: quare ſiue illud, ſiue hoc ducas

go ſi factores diuerſa ſigna habeant, factum debet eſſe negatiuum.

Si vero factores ambo idem ſignum habeant, factum debet eſſe poſitiuum.

Demonstr. Nam imprimis ſi factor vterque poſitiuus eſt, patet factum debere eſſe poſitiuum, cum e poſitiuo aliquoties poſito factum enaſcatur poſitiuum: ſin autem ambo factores negatiui ſint, regula ſic demonſtratur. Quiuis factor negatiuus vnus repraeſentari poteſt per $-a$, alter per $-b$; ergo ſi demonſtratum fuerit, quod $-a \times -b$ det factum poſitiuum, id erit generatim verum; hoc autem ſic demonſtratur. Sit $a - a$ multiplicandum per $-b$, erit prima pars facti ex ante demonſtratis $= -ab$; altera pars facti literalis rurſus erit $ab$, at dubium eſt, an debeat eſſe $+ab$, an $-ab$: dico debere eſſe $+ab$, et ſic oſtendo: $a - a = 0$; ergo hic nihilum debet per $-b$ multiplicari, ſeu toties poni, quoties eſt vnitas in $-b$; ſed nihilum quotiescunque ponatur, ſemper factum inde genitum debet eſſe nihilum, ac proinde etiam hic noſtrum factum debet eſſe nihilum; ſed niſi in ſecunda facti parte poneretur $+ab$, noſtrum factum non eſſet nihilum, ſed eſſet $= -2ab$: ergo in ſecunda parte debet poni $+ab$: ergo $-a \times -b = +ab$: ergo ſi factores ambo idem ſignum habeant, factum debet eſſe poſitiuum.

2) Coefficientes terminorum more aliorum numerorum inter ſe multiplicentur, et facto literali praefigatur eorundem factum.

3) Literae diuerſae multiplicatoris, et multiplicandi ſeruato alphabeti ordine iungantur, vti

ſunt nullo ſigno interpoſito. Sic $a \times b = ab$; $3a \times 2c = 6ac$.

4) Si in factoribus eadem occurrat litera, haec in facto ſemel ſcribatur, et exponentes eius addantur. E. g. $a^2 \times a^3 b = a^5 b$.

Demonstr. Sit enim $a^3$ multiplicandum per $a^2$, dico factum eſſe $= a^5$. Nam $a^3$ eſt $= aaa$, et $a^2 = aa$ (16): ergo idem eſt, ſiue $a^3$ multiplicetur per $a^2$, ſiue $aaa$ per $aa$; ſed ſi $aaa$ multiplicetur per $aa$ coniungendo literas, factum eſt $aaaaa$, ſeu $a^5$: ergo etiam ſi $a^3$ multiplicetur per $a^2$, factum eſt $a^5$. Eadem demonſtratio cuiuis caſui ſpeciali accommodari poteſt.

5) Denique peracta multiplicatione facta particularia addantur in vnam ſummam iuxta leges additionis (29), et ſumma erit totum productum.

## EXEMPLA.

I. $$\left.\begin{array}{r} 3ab - 2cd + f \\ 2c - 3f^2 \end{array}\right\} \textit{Factores.}$$

$$\left.\begin{array}{r} 6abc - 4c^2d + 2cf \\ - 9abf^2 + 6cdf^2 - 3f^3 \end{array}\right\} \textit{Factum.}$$

II. $$\left.\begin{array}{r} 2a^2 + 3ab - 4c^2d^2 \\ b - 2c + 3 \end{array}\right\} \textit{Factores.}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2a^2b + 3ab^2 - 4bc^2d^2 \\ - 4a^2c - 6abc + 8c^3d^2 \\ + 6a^2 + 9ab - 12c^2d^2 \end{array}\right\} \textit{Factum.}$$

III. $2a - 2b + c$ }
$2a - 2b + c$ } *Factores.*

$4a^2 - 4ab + 2ac$
$- 4ab + 4b^2 - 2bc$ } *Facta*
$+ 2ac - 2bc + c^2$ } *part.*

$4a^2 - 8ab + 4ac + 4b^2 - 4bc + c^2$ *Fact. tot.*

IV. $a^m + b^x - 2c^n$ }
$2a^m - 3b$ } *Factores.*

$2a^{2m} + 2a^m b^x - 4a^m c^n$ }
$- 3a^m b - 3b^{x+1} + 6bc^n$ } *Factum.*

SCHOLION. Vt modum ipſum operandi tirones facilius peruideant, iuuabit poſtremum exemplum paulo diffuſius perſequi. Itaque 1) per $2a^m$ multiplicetur terminus primus multiplicandi $a^m$, erit factum iuxta regulas ſuperiores $= 2a^{2m}$, quod proinde infra lineam ſcribatur. Deinde per eundem multiplicatoris terminum multiplicetur $+ b^x$, erit factum $= + 2a^m b^x$. Denique multiplicetur etiam $- 2c^n$, erit factum $= - 4a^m c^n$. 2) Tranſeatur ad ſecundum multiplicatoris terminum $- 3b$, ac per eum multiplicetur imprimis $a^m$, erit factum $= - 3a^m b$ ſcribendum in ſecunda ſerie. Deinde per eundem etiam multiplicetur $+ b^x$, erit factum $= - 3b^{x+1}$ addendo ſcilicet exponentes. Demum per eundem multiplicetur $- 2c^n$, erit factum $= + 6bc^n$. 3) Quoniam facta haec particularia meris heterogeneis terminis conſtant, addi, ſeu ad ſimpliciorem expreſſionem reduci nequeunt; ac proinde ſine vlla vlteriore operatione relinquuntur.

49. Numerorum ſimplicium multiplicatio nullas habet regulas, ſed neceſſe eſt aut memoria tenere, aut in promtu habere tabellam, vt vocant, Pythagoraeam, quam iſthic adiecimus.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | D | | | |
| A | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | B |
| | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | |
| | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | |
| | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | |
| | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | |
| F | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | G |
| | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | |
| | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | |
| | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | |
| | C | | | | | | E | | | |

Ope huius tabellae multiplicatio numerorum ſimplicium facile peragitur. Sit e. g. numerus 7 multiplicandus per 6. Quaeratur in ſerie AB numerus 7, et in ſerie AC numerus 6, aut contra; tum a 7 procedatur per ſeriem DE, et a 6 per ſeriem FG, dum perueniatur ad quadratulum, in quo concurrunt duae illae ſeries: numerus 42 illi

illi quadratulo inſertus eſt factum quaeſitum. Eadem ratione inuenietur $9 \times 8 = 72$, $8 \times 7 = 56$ etc.

50. Problema. *Numeros quosuis multiplicare.*

Resolut. Pro multiplicandis numeris compoſitis hae regulae ſeruient.

1) Muliplicator ſubſcribatur multiplicando ea prorſus lege, quam in additione conſtituimus (30), ducaturque transuerſa linea factum a factoribus ſeparans.

2) Si multiplicator vnica nota conſtet, per eam a dextris inchoando multiplicentur vnitates, decades, centenarii etc. multiplicandi, et facta particularia ſcribantur infra lineam, quae ſicubi vltra 9 excreſcant, fiat reiectio ad factum ſequens, quemadmodum dictum eſt in additione (30).

3) Si multiplicator pluribus notis conſtet, imprimis per eius vnitates multiplicetur totus multiplicandus, vt ante. Tum per eius decades rurſus eodem modo multiplicetur totus multiplicandus, at initium productorum particularium fiat ſub decadibus multiplicatoris; denique tranſeatur eadem lege ad centenarios, millenarios etc. et ſcribendi initium ſemper fiat ſub ea nota multiplicatoris, per quam fit multiplicatio.

Demonstr. Imprimis euidens eſt ope huius regulae partes omnes multiplicandi, adeoque totum multiplicandum toties poni, quot ſunt in omnibus notis multiplicatoris, ſeu in toto multiplicatore vnitates. Deinde cum vnitates multiplicandi ducuntur in decades multiplicatoris, idem eſt, ac ſi decades multiplicarentur per vnitates (45), ac proinde factum ſignificat decades ſe-

cundo a dextris loco ſcribendas. Eodem modo patet factum ex vnitatibus multiplicandi in centenarios multiplicatoris continere centenarios tertio loco ſcribendos, et ſic deinceps.

4) Facta omnia particularia peracta multiplicatione addantur in vnum totum, quod continebit integrum factum.

5) Si in fine vnius, vel vtriusque factoris occurrant zeri, iis interea omiſſis fiat multiplicatio per reliquas notas, et a dextris totius facti adiungantur tot zeri, quot erant in fine factorum. Conf. exempl. 3.

6) Si in loco intermedio multiplicatoris occurrant zeri, iis omiſſis multiplicatio fiat per reliquas notas, ſeruato tamen ordine, quo per regulam tertiam facta particularia ſcribenda ſunt. Conf. exempl. 4.

7) Denique ſi multiplicandus conſtet numeris heterogeneis reducibilibus, vel ſingulae ſpecies a minima inchoando multiplicentur ſeruata lege quarta, quam pro additione praeſcripſimus (30): vel reducantur omnes ad infimam ſpeciem, e. g. floreni, et groſſi ad crucigeros, ac deinde multiplicentur. Conf. exempl. 5.

## EXEMPLA.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I. | 3204 <br> 2 | } *Factores.* | II. | 68079 <br> 253 } *Factores.* |
| | 6408 | *Factum.* | | 204237 <br> 340395 <br> 136158 } *Facta part.* |
| | | | | 17223987 ] *Fact. integr.* |

III.

III. 36|00, 24|0 } *Factores.*
144 } *Facta*
72 } *part.*
864000 *Fact.integr.*

IV. 3652, 2003 } *Factores.*
10956 } *Facta*
7304 } *Part.*
7314956 *Fact. integr.*

flor. groſſ. cruc.
V. 4, 16, 2 } *Factores.*
24 }
116, 0, 0 *Fact. integr.*

vel
cruc.
290 } *Factores.*
24 }
1160 } *Facta*
580 } *part.*
6960 *Fact. integr.*

Scholion. Vt omnem operandi rationem perſpiciant tirones, reſumemus exemplum ſecundum. Igitur 1) per 3 multiplicetur totus multiplicandus dicendo: ter 9 ſunt 27, et ſcriptis 7 vnitatibus retineantur 2 decades; tum dicatur: ter 7 (ſeu ter 70) ſunt 21 (ſeu 210), et additis prioribus 2 decadibus ſunt 23; ſcribantur ergo 3 decades, et retineantur 2 centenarii. Porro dicatur ter 0 eſt 0, ac additis 2 illis centenariis ſcribatur 2. Rurſus dicatur: ter 8 ſunt 24, et ſcriptis 4 millenariis retineantur 2 decemmillenarii. Denique dicatur: ter 6 ſunt 18, ac duobus ilis additis ſunt 20; ſcribantur ergo 20. 2) Similiter per 5 multiplicetur totus multiplicandus, et productum initium ſumat a loco ſecundo, quem occupat 5 in multiplicatore. 3) Eodem pacto per 2 fiat multiplicatio, et productum initium capiat a loco tertio, quem

tenet 2 in multiplicatore. 4) Abſoluta multiplicatione tria haec facta particularia addantur, et obtinebitur factum integrum.

51. *Diuiſio* eſt vnius quantitatis ab altera ablatio toties facta, quoties tertia quaepiam quantitas continet vnitatem: e. g. 6 diuidere per 2 eſt numerum 2 a numero 6 ter tollere, quoties nimirum in eo continetur. Quantitas, quae hunc in modum tollitur, *diuiſor* adpellatur: quantitas, ex qua diuiſor tollitur, *diuidendus* dicitur: quantitas demum, quae ſuis vnitatibus indicat, quoties tollendus ſit diuiſor e diuidendo, *quotus*, vel *quotiens* vocatur. In allato exemplo diuiſor eſt 2, diuidendus 6, quotus 3.

52. Coroll. 1. Cum ergo diuiſor toties tollatur e diuidendo, quoties in eodem continetur, diuiſor toties eſt in diuidendo, quoties vnitas in quoto.

53. Coroll. 2. Hac diuiſoris ablatione diuidendus penitus deſtruitur, cum diuiſio accurata eſt: ſi ergo diuiſor iterum toties reponatur, quoties fuit ablatus, ſeu quoties eſt vnitas in quoto, reſtitui in integrum debet diuidendus; atqui diuiſorem toties reponere, eſt illum per quotum multiplicare (40): ergo diuiſor ductus in quotum reſtituere debet diuidendum. Eadem haec vera ſunt de parte diuidendi per diuiſionem deſtructa, cum diuiſio abſque reſiduo fieri nequit.

54. Coroll. 3. Cumque idem factum prodeat ſiue diuiſor ducatur in quotum, ſiue quotus in diuiſorem (45), palam eſt quotum toties contineri in illo facto, ſeu in diuidendo, quoties eſt vnitas in diuiſore.

55. COROLL. 4. Si factum aliquod diuidatur per vnum factorem, quotus eſt alter factor (47). E. gr. ſi *ab* diuidatur per *a*, quotus eſt *b*; ſi per *b*, quotus eſt *a*.

56. COROLL. 5. Vtrum legitima fuerit multiplicatio oſtendit diuiſio. Legitima enim eſt multiplicatio, ſi factum coaleſcat e multiplicando praeciſe toties poſito, quoties eſt vnitas in multiplicatore (40); id vero innoteſcit, ſi ablato toties multiplicando, quoties eſt vnitas in multiplicatore, factum penitus deſtruatur (43), id eſt, ſi factum per multiplicandum abſque vllo reſiduo diuidi poſſit (51).

57 PROBLEMA. *Quantitatem quamcunque algebraicam per aliam diuidere.*

RESOLUT. Scribatur primum diuiſor; tum in eadem linea ſcribatur diuidendus parentheſi incluſus. Deinde per primum diuiſoris terminum diuidatur primus, aut quiuis alius diuidendi terminus, in quo is exacte continetur, et quotus ſcribatur poſt diuidendum; quia vero diuiſor toties debet tolli a diuidendo, quoties eſt vnitas in quoto (51), debet prius diuiſor toties poni, ſeu per quotum multiplicari, et factum hinc enatum a diuidendo ſubtrahi. Id quod peracta ſubtractione remanſit e diuidendo, rurſus vt ante diuidatur, et nouus quotus ducatur in totum diuiſorem, factumque a diuidendo ſubtrahatur. Eodem pacto continuetur operatio, dum nihil denique reſtet e diuidendo. Quodſi inter operandum aduertatur ſubtractione diuiſoris in quotum ducti numerum terminorum in diuidendo non minui, id erit plerumque indicium diuiſio-

nem abſque reſiduo peragi non poſſe: quare indicetur duntaxat diuiſio, ſubſcripto diuiſore infra diuidendum interiecta linea vt in exempl. 3 et 4. Speciales porro diuiſionis regulae ſunt:

1) Quotus e terminis eodem ſigno affectis ſemper eſt poſitiuus: contra e terminis diuerſa ſigna habentibus ſemper eſt negatiuus. Quatuor occurrunt caſus; nam 1*mo* vel vterque terminus habet ſignum +, vel 2*do* vterque habet —, vel 3*tio* diuidendus habet +, diuiſor —, vel 4*to* diuidendus habet —, diuiſor +.

Demonst. Pro caſu 1*mo*. Cum diuidendus ſit factum e diuiſore in quotum (53), quiuis diuidendus poſitiuus repraeſentari poteſt per $ab$, et diuiſor poſitiuus per $a$: ergo ſi hic demonſtrauero quotum eſſe poſitiuum, id erit in omni tali caſu verum; hoc autem ſic demonſtro. Si $ab$ diuidatur per $a$, quotus literalis eſt $b$ (55), at dubium eſt, an debeat eſſe $+b$, an $-b$; dico debere eſſe $+b$. Nam diuiſor ductus in quotum reſtituere debet diuidendum (53); atqui niſi in quoto poneretur $+b$, non reſtitueret: ergo.

Pro caſu 2*do*. Quiuis diuidendus negatiuus repraeſentari poteſt per $-ab$, et quiuis diuiſor negatiuus per $-a$: ergo ſi hic demonſtrauero quotum eſſe poſitiuum, id erit in omni tali caſu verum; hoc autem ſic demonſtro. Si $-ab$ diuidatur per $-a$, quotus literalis eſt $b$, at dubium eſt, an debeat eſſe $+b$, an $-b$; dico debere eſſe $+b$. Nam diuiſor ductus in quotum etc. vt ſupra.

Pro caſu 3*tio*. Quiuis diuidendus poſitiuus repraeſentari poteſt per $ab$, et quiuis diuiſor nega-

tiuus per — $a$: ergo ſi hic demonſtrauero quotum eſſe negatiuum, id erit in omni tali caſu verum; hoc autem ſic demonſtro. Si $ab$ diuidatur per — $a$, quotus literalis eſt $b$; at dubium eſt etc. vt ſupra.

Pro caſu 4*to*. Quiuis diuidendus negatiuus repraeſentari poteſt per —$ab$, et diuiſor poſitiuus per $a$: ergo ſi hic demonſtrauero quotum eſſe negatiuum, id erit in omni tali caſu verum; hoc autem ſic demonſtro. Si — $ab$ diuidatur per $a$, quotus literalis eſt $b$; at dubium eſt etc. vt ſupra.

2) Coefficiens termini diuidendi diuidatur per coefficientem diuiſoris: quodſi exacte diuidi nequeat, indicetur tantummodo diuiſio, ſcribendo coefficientem diuiſoris infra coefficientem diuidendi interiecta linea.

3) Siquas literas communes habeant diuiſor et diuidendus, eae in quoto ſemel ſcribantur, et exponens diuiſoris ſubtrahatur ab exponente diuidendi, aut ſi ſubtrahi nequit, mutato ſigno addatur (37). Quodſi in quoto aliqua litera pro exponente acquirat o, ſeu nihilum, ea, vt dicemus, aequiualet vnitati, adeoque ſi in quoto praeter eam adſint aliae quantitates, ea litera illic omitti poteſt, ſecus expreſſe ponenda eſt, vel loco eius vnitas ſcribenda. E. g. $a^2$ diuiſum per $a^2 = a^0 = 1$.

DEMONSTR. Sit $a^5$ diuidendum per $a^2$, dico quotum fore $a^3$. Nam $a^5$ eſt $= a^3 \times a^2$: ergo idem debet quotus prodire, ſiue per $a^2$ diuidatur $a^5$, ſiue eius loco diuidatur $a^3 \times a^2$; ſed ſi per $a^2$ diuidatur $a^3 \times a^2$, quotus eſt $a^3$ (55):

ergo etiamſi per idem $a^2$ diuidatur $a^5$, quotus eſt $a^3$. Eadem demonſtratio cuiuis caſui ſpeciali accommodari poteſt.

4) Abſolutis communibus literis, ſi diuidendus praeterea habeat alias literas, diuiſor nullas, eae in quoto ſcribuntur vt ſunt: e. g. ſi $a^3b^2c$ diuidi debeat per $ab$, quotus erit $a^2bc$. Si vero etiam diuiſor praeter communes habeat alias literas, indicatur tantummodo diuiſio, ſcribendo diuiſoris literas infra diuidendi literas interiecta linea: e. g. ſi $a^2b^3c^4$ diuidi debeat per $abd$, quotus erit $ab^2\frac{c^4}{d}$. Denique ſi diuiſor habeat omnes eas literas, quae ſunt in diuidendo, et inſuper aliquas, indicanda ſolum erit tunc diuiſio, ſcribendo diuiſorem infra diuidendum interiecta linea, et quotus ſecundum infra dicenda ad minores terminos reducendus: e. g. ſi $4a^2b$ diuidi debeat per $2ab^2c$, ſcribatur $\frac{4a^2b}{2ab^2c}$.

# EXEMPLA.

*Diuiſ.* *Diuid.*

I. $2c - 3f^2$ ( $6abc - 4c^2d + 2cf - 9abf^2$

*Quot.*

$+ 6cdf^2 - 3f^3$ ) $3ab - 2cd + f$.

*Diuiſ.* *Diuid.*

II $2a^2 + 3ab - 4c^2d^2$ ( $2a^2b + 3ab^2 - 4bc^2d^2$

$- 4a^2c - 6abc + 8c^3d^2 + 6a^2 + 9ab - 12c^2d^2$ )

*Quot.*

$b - 2c + 3$.

*Diuiſ.*

III. $3ab - 2b^3c^2 + 5$ ( $6a^{m+1}b^2 + 10a^mb$

*Diuid.*

$- 9abcd^n - 15cd^n + 12a^3bc - 4a^mb^4c^2 + 20a^2c$

*Quot.*

$+ 6b^3c^3d^n - 8a^2b^3c^3 + 12a^2b^4$ ) $2a^mb - 3cd^n$

$$+ 4a^2c + \frac{12a^2b^4}{3ab - 2b^3c^2 + 5}$$

*Diuiſ.*

IV. $2a^2c^2 - 3a^nb^m$ ( $10a^3b^mc^2 - 24a^2b^3c^3$

*Diuid.*

$- 15a^{n+1}b^m + 36a^nb^{m+3}c - 6a^mc^3$ ) $5ab^m$

*Quot.*

$$- 12b^3c - \frac{6a^mc^3}{2a^2c^2 - 3a^nb^m}$$

SCHOLION. Prima duo exempla continent comprobationem multiplicationum, quas ſupra (48) in exempl. 1, et 2 fecimus. Vt autem operandi modum plenius intelligant tirones, reſumemus exemplum tertium. Igitur 1) primum diuidendi membrum $6a^{m+1}b^2$ diuidatur per primum diuiſoris membrum $3ab$ iuxta regulas ſuperiores, et quotus $2a^mb$ ſcribatur poſt diuidendum: deinde diuiſor totus ducatur in quotum, ac factum $6a^{m+1}b^2 - 4a^mb^4c^2 + 10a^mb$ ſubtrahatur a diuidendo, erit reſiduum primum $- 9abcd^n - 15cd^n + 12a^3bc + 20a^2c + 6b^3c^3d^n - 8a^2b^3c^3 + 12a^2b^4$. 2) Rurſus primum huius reſidui membrum $- 9abcd^n$ diuidatur per pri-

mum diuiſoris membrum $3ab$, et quotus $-3cd^n$ ſcribatur poſt priorem quotum: deinde diuiſor totus ducatur in nouum hunc quotum, ac factum $-9ab'cd^n + 6b^3c^3d^n - 15cd^n$ ſubtrahatur a diuidendo, ſeu a primo illo reſiduo, et habebitur reſiduum ſecundum $12a^3bc + 20a^2c - 8a^2b^3c^3 + 12a^2b^4$. 3) Primum huius reſidui membrum $12a^3bc$ iterum diuidatur per primum diuiſoris membrum $3ab$, et quotus $+4a^2c$ ſcribatur poſt quotum praecedentem: deinde diuiſor totus ducatur in nouum hunc quotum, et factum $12a^3bc - 8a^2b^3c^3 + 20a^2c$ tollatur a diuidendo, ſeu a ſecundo reſiduo, remanebit pro reſiduo tertio $12a^2b^4$. 4) Quod ſi vlterius eadem ratione tentetur diuiſio, facile adparebit eam non ſuccedere; neque enim minuentur, ſed creſcent reſidui termini: quare poſtremum hoc reſiduum ſcribatur poſt quotum, et interiecta linea diuiſor eidem ſubſcribatur.

58. Diuiſio quantitatum complexarum ſaepe indicatur tantum facienda, reapſe non perficitur; et tunc vel ſubſcribitur diuiſor diuidendo, vti ſupra diximus: vel poſt diuidendum parentheſi incluſum ponitur diuiſor et ipſe parentheſi incluſus punctis duobus interpoſitis. E. g. $(3a^2b - 5cd) : (2b^2 + 5b^2)$ ſignificat priorem quantitatem per poſteriorem eſſe diuiſam.

59. PROBLEMA. *Numeros diuidere per numeros ſimplices.*

RESOLUT. Si numerus etiam diuidendus ſimplex fuerit, quotus abſque vllo artis adminiculo innoteſcit; facile enim quisque peruidet, quoties numerus ſimplex ab alio ſimplice poſſit ſubtrahi,

ſeu quoties in illo contineatur. At ſi diuidendus compoſitus ſit, arte opus eſt, quae hiſce praeceptis continetur:

1) Scribatur numerus diuidendus intra parentheſim, ac diuiſor ad eius ſiniſtram collocetur.

2) Quaeratur, quoties diuiſor contineatur in prima, vel ſi ea diuiſore minor eſt, in duabus primis diuidendi notis a ſiniſtra inchoando; deinde quotus poſt diuidendum ſcriptus ducatur in diuiſorem, et factum tollatur ab iis diuidendi notis, quae diuidebantur; ac ſiquid remaneat ducta transuerſa linea ſubſcribatur.

3) Reſiduo huic ad dextram iungatur ſequens diuidendi nota, aut ſola ponatur, ſi nihil remanſit, ſuperius autem in ipſo diuidendo vel deleatur, vel ſignetur virgula indicante eam notam iam eſſe adiunctam reſiduo. In his notis rurſus inquiratur quoties diuiſor contineatur, et quotus poſt priorem ſcriptus ducatur in diuiſorem, et factum ſubtrahatur, vt ante. Deponatur iterum ſequens diuidendi nota, ac eadem operatio tamdiu continuetur, dum omnes diuidendi notae ſenſim depoſitae ſint. Siquid ex ſubtractione vltima remaneat, adiungatur ad dextram quoti, et lineola interpoſita diuiſor eidem ſubſcribatur. Conf. exempl. 2.

4) Si reſiduum nullum fuerit, et depoſita diuidendi nota minor ſit diuiſore, ſcribatur pro quoto zerus, ac ex diuidendo adhuc vna nota deponatur. Conf. exempl. 3. et 4.

# EXEMPLA.

| | *Diuiſ.* | *Diuid.* | *Quot.* |
|---|---|---|---|
| I. | 7 | 24,1,5, | 345 |
| II. | 5 | 46,8,7, | $937\frac{2}{5}$ |
| III. | 4 | 20,3,2, | 508 |
| IV. | 8 | 33,6,9,6,6,4, | 421208 |

60. **Problema.** *Numeros diuidere per numeros compoſitos.*

Resolut. Obſeruata eadem ſcribendi lege, qua vſi fuimus in ſuperioribus, cetera fiant iuxta praeceptiones ſequentes:

1) Inquiratur, quoties prima diuiſoris nota contineatur in prima diuidendi nota, aut (ſi ea minor ſit, quam prima diuiſoris nota) in duabus primis diuidendi notis, et quotus in totum diuiſorem ductus ſubtrahatur a tot prioribus diuidendi notis, quot habet notas diuiſor, vel vna pluribus, ſi prima diuidendi nota minor ſit, quam prima diuiſoris. Si factum hoc ſubtrahi inde nequeat, indicio eſt quotum iuſto maiorem eſſe, ac proinde vnitate multandum: ſin autem facta ſubtractione reſiduum maius fuerit diuiſore, argumento eſt quotum iuſto minorem eſſe, atque adeo vnitate augendum.

2) Peracta ſubtractione reſiduo ad dextram iungatur ſequens diuidendi nota, et operatio eadem plane ratione continuetur, dum omnes diuidendi notae ſenſim depoſitae ſint. Siquid ex vltima ſubtractione remaneat, iungatur ad dextram quoti, eique interiecta lineola diuiſor ſubſcribatur. Conf. exempl. 1.

3) Si reſiduum quoddam cum adiuncta nota diuidendi minus fuerit diuiſore, ſcribatur pro quoto zerus, et ex diuidendo nota ſequens iterum deponatur: ſi adhuc diuiſor maior fuerit, rurſus ſcribatur zerus pro quoto, et ex diuidendo nota ſequens denuo deponatur, idque tamdiu repetatur, dum reſiduum ſic auctum diuidi demum poſſit per diuiſorem; deinceps autem methodo conſueta continuetur operatio. Conf. exempl. 2.

4) Si diuiſor in fine zeros habeat, locus eſt compendio. Nimirum reſecentur a dextris diuidendi tot notae, quot zeri ſunt in fine diuiſoris, et diuiſione cum reliquis diuidendi, ac diuiſoris notis peracta, reſiduo vltimo, ſiquod fuerit, iungantur a dextris notae reſectae diuidendi, et interpoſita lineola ſubſcribatur diuiſor, vt in 3. exempl. Si vero tam in fine diuiſoris, quam in fine diuidendi adfuerint zeri, reſecentur totidem ab vtroque zeri, et fiat cum reliquis notis operatio. Conf. exempl. 4.

5) Numeri heterogenei reducibiles, e. g. dies, horae, minuta, eadem plane ratione diuiduntur, dummodo ad ſpeciem minimam prius reducantur.

# EXEMPLA.

| | Diuiſ. | Diuid. | Quot. | |
|---|---|---|---|---|
| I. | 456 | 2568, 0, 4, | 563 | 76 |
| | | | | 456 |
| II. | 298 | 894,7,4,5,0, | 30025 | |
| III. | 25 \| 00 | 46,8,9 \| 34 | 187 | 1434 |
| | | | | 2500 |
| IV. | 38 \| 00 | 97,2,8,0, \| 00 | 2560 | |

Scholion. Dum inquiritur, quoties prima diuiſoris nota contineatur in prima, vel in duabus primis notis diuidendi, ſimul attendi debet, an etiam reliquae diuiſoris notae in ſequentibus diuidendi notis totidem vicibus contineantur, ne quotus iuſto maior ſumatur. Sic in exemplo ſecundo licet 2 in 8 quater contineatur, quia tamen 9 in 9, et 8 in 4 toties non continetur, pro quoto non 4, ſed 3 ponendum eſt. Iuuat hoc idem exemplum in tironum gratiam enucleatius expendere. Itaque 1) quaeratur, quoties 2 contineantur in 8, et iuxta ſuperiorem admonitionem pro quoto ponatur 3, et per eum totus diuiſor multiplicetur, ac factum 894 ex 894 ſubtraha-

tur, atque ad reſiduum, quod quidem hic nullum eſt, adiungatur ſequens nota diuidendi 7. 2) Quia diuiſor in 7 nulla vice continetur, ſcribatur pro quoto o, qui ductus in diuiſorem dat nihil, quod a 7 ſubtractum reliuquit totum 7: quare adiungatur ei ſequens nota diuidendi 4. 3) Quoniam diuiſor ne quidem in 74 continetur, rurſus pro quoto ponatur o, et facta diuiſoris per quotum multiplicatione, factique, quod eſt = o, a 74 ſubtractione remanet totum 74, ad quod adiungatur ſequens nota diuidendi 5. 4) Quaeratur quoties reperiatur 2 in 7, deprehendetur quidem reperiri ter, quia tamen 98 in 45 toties non reperitur, idcirco pro quoto ponatur 2, et facta diuiſoris per hunc quotum multiplicatione factum 596 tollatur a 745, ac ad reſiduum 149 adiungatur poſtrema nota diuidendi o. 5) Demum indagetur, quoties contineatur 2 in 14; deprehendetur quidem contineri ſepties, tamen propter ſuperiorem admonitionem pro quoto ſcribatur 5, qui ductus in diuiſorem dat factum 1490, quod ablatum a 1490 nihil relinquit: igitur quotus eſt 30025. Bona autem erit operatio, ſi deprehendatur eſſe 298×30025=8947450(56.)

# CAPVT III.

## *De natura, et variis transformationibus Fractionum.*

61. **F***ractio* eſt quantitas, quae integri cuiuspiam, ſeu totius vnam, vel plures partes ſignificat. E. g. 2 groſſi ſunt fractio comparate ad florenum, quia ſignificant duas viceſimas floreni partes.

62. Coroll. 1. Quoniam pars quaeuis comparata ad ſuas partes totius inſtar haberi poteſt, patet dari etiam *fractionum fractiones.* E. g. groſſus comparate ad florenum eſt fractio: comparate vero ad crucigerum eſt totum; hinc cruciger eſt groſſi, ac proinde fractionis fractio.

63. Coroll. 2. Ad determinandum fractionis cuiusuis valorem duabus opus eſt quantitatibus, quarum altera oſtendat numerum, altera ſpeciem partium integri, quas fractio ſignificat: vnde prior *numerator*, poſterior *denominator* adpellatur. Sic valor fractionis floreni diſtincte intelligi nequit, niſi exprimatur *quot*, et *quales* floreni partes fractio denotet. Solet autem denominator ſubſcribi numeratori interiecta lineola, e. g. $\frac{2}{3}$, quae fractio hunc in modum enunciatur: duae tertiae, ſcilicet cuiusdam integri partes.

64. Coroll. 3. Quando numerator aequatur denominatori, fractio omnes integri partes, adeoque totum integrum denotat: ſi numerator maior ſit denominatore, fractio plus quam omnes partes

tes, ac proinde plus quam integrum ſignificat: quare fractiones huius generis *impropriae* ſunt. Fractio ergo *genuina* illa ſolum dicitur, cuius numerator minor eſt denominatore, ſeu quae aliquas duntaxat, non omnes, integri partes denotat.

65. COROLL. 4. Quemadmodum igitur valor fractionis aequatur vnitati, ſeu vni integro, ſi numerator aequalis ſit denominatori; ita fractio dupla, tripla, quadrupla etc. eſt, ſi numerator fuerit duplus, triplus, quadruplus etc. denominatoris. Vnde valorem fractionis indicat quotus, qui naſcitur numeratore per denominatorem diuiſo. Hinc ſi tam numerator, quam denominator eadem ſigna habeant, valor fractionis poſitiuus eſt; ſi contraria, negatiuus (57).

66. COROLL. 5. Quare reſidua diuiſionum (58) ſunt fractiones genuinae. E. g. $\frac{3}{4}$ partes vnius floreni idem plane ſignificat, ac 3 floreni diuiſi per 4, ſeu ac quarta pars trium florenorum: nam tres quartae partes vnius, et vna quarta pars trium florenorum ſunt denique 15 groſſi.

67. THEOREMA. *Si manente eodem denominatore creſcat numerator, valor fractionis augetur.*

DEMONSTR. Si enim manet idem denominator, manent eiusdem ſpeciei partes (63); ſi creſcit numerator, fractio plures ac plures eiusdem ſpeciei partes ex eodem integro ſignificat: ergo eius valor augetur.

68. COROLL. 1. Eadem ratiocinatione efficitur decreſcere valorem fractionis, ſi manente eodem denominatore minuatur numerator.

69. COROLL. 2. Quare ſi duae fractiones communem habeant denominatorem, eius valor maior eſt, quae maiorem habet numeratorem, et quidem tanto maior, quanto numerator maior eſt. E. g. $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$

70. THEOREMA. *Si manente eodem numeratore creſcat denominator, valor fractionis minuitur.*

DEMONSTR. Si enim manet idem numerator, fractio ſemper totidem partes integri denotat (63): ſi creſcit denominator, integrum in plures, adeoque hoc ipſo in minores partes diuiditur: ergo fractio totidem quidem, ſed minores et minores partes denotat ex eodem integro: ergo valor eius minuitur.

71. COROLL. 1. Eodem prorſus modo adparet valorem fractionis augeri, ſi eodem manente numeratore decreſcat denominator.

72. COROLL. 2. Si ergo duarum fractionum idem ſit numerator, ea maior eſt, quae minorem habet denominatorem, et tanto quidem maior, quanto denominator minor eſt. E.g. $\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$.

73. THEOREMA. *Si fractionis cuiuſpiam tam numerator, quam denominator per idem multiplicetur, valor eiusdem non mutatur.*

DEMONSTR. Creſcente enim numeratore valor fractionis creſcit (67), creſcente denominatore decreſcit (70): ergo vtroque creſcente, creſcit et decreſcit: ergo vtroque aequaliter creſcente, aequaliter creſcit et decreſcit, hoc eſt, non mutatur; atqui ſi tam numerator, quam denominator per idem multiplicentur, vterque aequaliter creſcit: ergo valor fractionis non mutatur.

74. THEOREMA. *Si fractionis cuiuſpiam tam numerator, quam denominator per idem diuidatur, valor eiusdem non mutatur.*

DEMONSTR. Decreſcente enim numeratore valor fractionis decreſcit (68), decreſcente denominatore creſcit (71): ergo vtroque decreſcente decreſcit et creſcit: ergo vtroque aequaliter decreſcente aequaliter decreſcit et creſcit, hoc eſt, non mutatur; atqui ſi tam numerator, quam denominator per idem diuidatur, vterque aequaliter decreſcit: ergo valor fractionis non mutatur.

75. PROBLEMA. *Datas quotcunque fractiones heterogeneas, ſeu diuerſos denominatores habentes ad eundem communem denominatorem reducere.*

RESOLUT. Fractionis cuiusuis tam numerator, quam denominator ducatur in reliquarum omnium denominatores: ita enim et omnium idem erit communis denominator, et ſingulae valorem priſtinum retinebunt, cum earum tam numeratores, quam denominatores per eaſdem quantitates multiplicentur (73).

## EXEMPLA.

I. $\frac{2a^3b}{4c^2}, \frac{4}{5}, \frac{2a^{m+1}}{3a^{-n}}$ *Reducendae*

$\frac{30a^{-n+3}b,\ 48a^{-n}c^2,\ 40a^{m+1}c^2}{60a^{-n}c^2}$ *Reductae.*

II. $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{7}$ *Reducendae.*

$\frac{140,\ 168,\ 105,\ 90}{210}$ *Reductae.*

76. **Problema.** *Datas quaſuis fractiones ad minores terminos, ſeu ad minores numeratores, et denominatores reducere manente cuiuſuis valore.*

**Resolut.** Fractionis cuiuſuis tam numerator, quam denominator diuidatur per aliquam quantitatem, quae in vtroque exacte contineatur: ita enim et termini fractionum minuentur, et priſtinus ſingularum valor retinebitur (73).

## EXEMPLA.

I.

$$\frac{30a^{-n+3}b}{60a^{-n}c^2} \text{ diuid. per } 30a^{-n} \text{ fit } \frac{a^3b}{2c^2}$$

$$\frac{-48a^{-n}c^2}{-60a^{-n}c^2} \text{ diuid. per } 12a^{-n}c^2 \text{ fit } \frac{4}{5}$$

$$\frac{40a^{m+1}c^2}{-60a^{-n}c^2} \text{ diuid. per } 20c^2 \text{ fit } -\frac{2a^{m+1}}{3a^{-n}}.$$

II.

$$\frac{-140}{210} \text{ diuid. per } 70 \text{ fit } -\frac{2}{3}$$

$$\frac{-168}{-210} \text{ diuid. per } 42 \text{ fit } \frac{4}{5}$$

$$\frac{105}{210} \text{ diuid. per } 105 \text{ fit } \frac{1}{2}$$

$$\frac{90}{-210} \text{ diuid. per } 30 \text{ fit } -\frac{3}{7}$$

SCHOLION. Communis numeratorum, et denominatorum diuiſor in literis facile reperitur, in numeris paulo maioribus non item. Qui de fractionum transformationibus prolixius agunt, adferunt methodum inueniendi communem diuiſorem maximum, per quem ſcilicet diuiſi numeratores, ac denominatores ad ſimpliciſſimas expreſſiones reducantur: verum in vſu quotidiano fere ſufficient animaduerſiones ſequentes. 1) Si numerator exacte metitur denominatorem, facta per eundem tam ſui ipſius, quam denominatoris diuiſione fractio ad minimos terminos reducitur. E.g.

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{2m}{n}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}};\ \frac{105}{210} = \frac{1}{2}.$$

2) Si tam numerator, quam denominator fuerint numeri pares, communis diuiſor ſemper erit 2. E. g. $\frac{748}{324} = \frac{374}{162} = \frac{187}{81}$. 3) Si tam numerator quam denominator in fine habuerint zeros, ambo diuidi poterunt per 10, 100 etc. deleto vtrobique vno, duobus etc. zeris. E. g. $\frac{140}{210} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$; $\frac{3000}{15000} = \frac{3}{15}$. 4) Si tam numerator quam denominator pro dextima nota habuerint numerum 5; aut alter 5, alter autem zerum, ambo diuidi poterunt per 5. E. g. $\frac{175}{225} = \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$; $\frac{125}{350} = \frac{25}{70} = \frac{5}{14}$.

77. PROBLEMA. *datam fractionem impropriam ad integra reducere.*

RESOLUT. Quoniam valor fractionis cuiusuis aequatur quoto, qui naſcitur e numeratore per denominatorem diuiſo (65), diuidatur numerator per denominatorem, quotus dabit integra vel

cum fractione. vel ſine fractione genuina remanente, E. g. $\frac{a^{2m}}{a^m} = a^m$; $\frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$.

78. Problema. *Datam quantitatem integram reducere ad fractionem dati denominatoris.*

Resolut. Cum fractionis valorem indicet quotus, qui oritur e diuiſione numeratoris per denominatorem (65), et quantitas per vnitatem diuiſa nihil mutetur, datae quantitati pro denominatore ſubſcribatur 1; ita quantitas manente priſtino valore induit formam fractionis, cuius ſi tam numerator, quam denominator, ſeu 1 ducantur in denominatorem datum, erit data quantitas reducta ad fractionem dati denominatoris. retento valore (73). E. g. ſit quantitas $a^{-2m}$ reducenda ad fractionem, cuius denominator ſit $b^2 a^{3m}$; primum data quantitas ſcribatur hunc in modum: $\frac{a^{-2m}}{1}$; deinde tam numerator, quam denominator ducatur in $b^2a^{3m}$, erit $a^{-2m} = \frac{b^2a^m}{b^2a^{3m}}$. Similiter numerus 3 reductus ad denominatorem 5 erit $= \frac{15}{5}$.

Scholion. In praxi ſufficiet datam quantitatem integram multiplicare per datum denominatorem, illumque facto ſubſcribere: nam rem eodem redire perſpicuum eſt.

# CAPVT IV.

## *De Additione, Subtractione, Multiplicatione, ac Diuiſione fractionum.*

79. PROBLEMA. *Datas quotcunque fractiones in vnam ſummam addere.*

RESOLUT. 1. Si fractiones fuerint heterogeneae, primum reducantur ad eundem denominatorem (75), deinde numeratores addantur more integrorum, et ſubſcribatur ſummae communis denominator. 2) Si fractionibus permiſta fuerint integra, poterunt ea vel ſeorſim addi, vel ad fractiones reduci (78), et cum iiſdem addi.

DEMONSTR. Fractiones heterogeneas e. g. $\frac{2}{3}$, et $\frac{4}{5}$ non poſſe cogi in vnam ſummam perſpicuum eſt; nam ea ſumma neque tertias, neque quintas partes denotaret: hinc primum reduci debent ad eundem denominatorem. Porro facta reductione valores fractionum pendent a numeratoribus, adeoque valor ſummae a ſumma numeratorum (69): ergo ſoli numeratores debent addi, ſummaeque ſubſcribi communis denominator. Et ſane euidens eſt $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ eſſe $= \frac{5}{7}$.

## EXEMPLA.

I. $\frac{2a}{3b} + \frac{4a}{3b} = \frac{6a}{3b} = \frac{2a}{b}$. Item $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$.

II. $\frac{6a^{3m}b^3}{a^{n+m}} + \frac{b^3}{2a^{n-3m}} = \frac{12a^{n+m}b^3 + a^{n+m}b^3}{2a^{2n-2m}}$
$= \frac{13a^{n+m}b^3}{2a^{2n-2m}}$.

III. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} = \frac{70 + 84 + 90}{105} = \frac{244}{105}$
$= 2\frac{34}{105}$.

IV. $3\frac{2}{5} + 7\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 10\frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{52}{5}$
$+ \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{312 + 15 + 20}{30} = \frac{347}{30} =$
$11\frac{17}{30}$.

SCHOLION. Additio fractionum algebraicarum ſaepiſſime fit iungendo duntaxat eaſdem cum ſuis ſignis absque reductione ad communem denominatorem. Idem plerumque fit in ſubtractione.

80. PROBLEMA. *Datam fractionem ab altera ſubtrahere.*

RESOLUT. Quoniam ſubtrahere idem eſt, ac ſubtrahendum mutatis ſignis addere (37), eaedem plane ſunt leges ſubtractionis, quae additionis. Nimirum reductis fractionibus heterogeneis ad eundem denominatorem (75) tollatur numerator ſubtrahendi a numeratore minuendi, et reſiduo ſubſcribatur communis denominator.

## EXEMPLA.

I. $\frac{5a^2b}{7c^2} - \frac{2a^2b}{7c^2} = \frac{3a^2b}{7c^2}$

II. $4a + \frac{2b^2}{c} - 3a - \frac{b^2}{c} = a - \frac{b^2}{c}$.

III. $\frac{2}{3} - \frac{4}{7} = \frac{14 - 12}{21} = \frac{2}{21}$.

IV. $4\frac{3}{4} - 3\frac{1}{5} = 1\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{7}{4} - \frac{1}{5} = \frac{35 - 4}{20}$
$= \frac{31}{20} = 1\frac{11}{20}$.

SCHOLION. Additio fractionum comprobatur ſubtractione, et ſubtractio additione eo plane modo quo ſolent explorari additiones, et ſubtractiones quantitatum integrarum (28, 36).

81. PROBLEMA. *Fractionem vnam per alteram multiplicare.*

RESOLUT. Multiplicentur numeratores fractionum inter ſe, et denominatores inter ſe, factoque priori poſterius ſubſcribatur. Tres poſſunt caſus occurrere: vel enim 1*mo* in fractione multiplicatore numerator minor eſt denominatore, vel 2*do* aequalis, vel 3*tio* maior.

DEMONSTR. Pro caſu 1*mo*. Multiplicandus eſt ad factum vt vnitas ad multiplicatorem (41); ſed in hoc caſu vnitas maior eſt multiplicatore fracto (64): ergo etiam multiplicandus maior eſt facto: ergo vt ex multiplicando fiat factum, debet ille minui; vt autem minuatur fractio, debet eius numerator minus creſcere quam denominator (67, 70), ſeu debet eius numerator per aliquid minus, et denominator per aliquid maius multiplicari; atqui ex hypotheſi in multiplicatore numerator minor eſt denominatore: ergo numerator multiplicandi debet multiplicari per numeratorem multiplicatoris, et denominator per denominatorem.

Pro caſu 2*do*. Multiplicandus eſt ad factum vt vnitas ad multiplicatorem; ſed in hoc caſu vnitas aequatur multiplicatori (64): ergo etiam multiplicandus aequatur facto: ergo vt ex multiplicando fiat factum, is non debet mutari; vt autem fractio non mutetur, debet eius tam numerator quam denominator aequaliter creſcere (73), ſeu per idem multiplicari; atqui ex hypotheſi in multiplicatore numerator idem eſt cum denominatore: ergo numerator multiplicandi etc. vt ſupra.

Pro caſu 3*tio*. Multiplicandus eſt ad factum vt vnitas ad multiplicatorem; ſed in hoc caſu vnitas minor eſt multiplicatore fracto (64): ergo etiam multiplicandus minor eſt facto: ergo vt ex multiplicando fiat factum, debet ille augeri; vt autem augeatur fractio, debet eius numerator magis creſcere quam denominator (67, 70), ſeu debet eius numerator per aliquid maius, denominator per aliquid minus multiplicari; atqui ex hypotheſi in multiplicatore numerator maior eſt denominatore: ergo numerator multiplicandi etc. vt ſupra.

82. Quodſi quantitas integra ſit cum fractione multiplicanda, poteſt integrae valore retento ſubſcribi vnitas pro denominatore (78), et multiplicatio iuxta ſuperius dicta peragi. E. g.

$$a \times \frac{2a^m c}{d^2} = \frac{a}{1} \times \frac{2a^m c}{d} = \frac{2a^{m+1} c}{d}.$$

83. Coroll. Imo in hoc eodem caſu poteſt compendii cauſſa per quantitatem integram ſolus numerator fractionis multiplicari, cum vnitas quantitati integrae ſubſcribenda nihil multiplicet. E. g. $3a \times \frac{2b}{c^2} = \frac{6ab}{c^2}$.

# EXEMPLA.

I. $\frac{2a^{2m-2}b^3}{3c^2} \times \frac{a^3b^{-1}}{2c^m} = \frac{2a^{2m+1}b^2}{6c^{m+2}}$.

II. $\frac{4}{5} \times \frac{11}{12} = \frac{44}{60} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$.

III. $\left\{ 2a + \frac{3b^2}{c} \right\} \times \left\{ 4bc - \frac{2d^2}{b} \right\} =$

$8abc + \frac{12b^3c}{c} - \frac{4ad^2}{b} - \frac{6b^2d^2}{bc}$.

IV. $4\frac{2}{3} \times (8 - \frac{4}{5}) = 32 + \frac{16}{3} - \frac{16}{5} - \frac{8}{15}$

$= 32 + \frac{80 - 48 - 8}{15} = 32 + \frac{24}{15} = 32$

$+ \frac{8}{5} = 33\frac{3}{5}$.

SCHOLION. Mirum videri tironibus non debet, quod in multiplicatione per fractionem genuinam facta generetur factum minus ipſo multiplicando. Si enim quantitas aliqua per integram vnitatem multiplicetur, ea vtique tota ſemel ponitur: ſi ergo multiplicetur per quantitatem vnitate minorem, ſeu per genuinam fractionem, ne ſemel quidem ponitur, ſed pars duntaxat eius, et quidem talis, qualem deſignat multiplicator: quare neceſſe eſt, vt factum minus ſit multiplicando. E. g. dum fractio $\frac{4}{5}$ multiplicatur per $\frac{2}{3}$, reapſe duae partes tertiae ponuntur quatuor quintarum: hinc data fractio $\frac{4}{5}$ primum in tres partes diuidenda eſt, quod ſit, vt dicemus, multiplicando 5 per 3; et pars tertia bis accipienda, ſeu numerator 4 per 2 multiplicandus.

84. THEOREMA. *Fractio fractionis eſt factum e duabus fractionibus in ſe ductis enatum.*

DEMONSTR. Nam fractio fractionis eſt pars fractionis inſtar totius conſideratae (62); atqui

factum e duabus fractionibus enatum eandem partem multiplicandi exprimit, quam partem vnitatis denotat multiplicator: cum enim ſit multiplicandus ad factum vt vnitas ad multiplicatorem (41), qualis pars vnitatis eſt multiplicator, talis pars multiplicandi eſt factum.

85. Coroll. Quare multiplicationis ope fractiones fractionum ad ſimplices fractiones reduci poſſunt. E. g. $\frac{\frac{2a}{d}}{\frac{c}{d}} = \frac{2a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{2ac}{bd}$; $\frac{\frac{3a^2}{b}}{3}$

$= \frac{3a^2}{b} \times \frac{1}{3} = \frac{3a^2}{3b} = \frac{a^2}{b}$; $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$

$= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

86. Problema. *Fractionem vnam per alteram diuidere.*

Resolut. Numerator diuidendi ducatur in denominatorem diuiſoris, denominator diuidendi in numeratorem diuiſoris, et facto priori poſterius ſubſcribatur; aut, quod eodem redit, diuiſor inuertatur, et fiat fractionum multiplicatio, vt ſupra (81). Tres poſſunt caſus occurrere; vel enim 1*mo* in fractione diuiſore numerator minor eſt denominatore, vel 2*do* aequalis, vel 3*tio* maior.

Demonstr. Pro caſu 1*mo*. Quotus eſt ad diuidendum vt vnitas ad diuiſorem (54): ſed in hoc caſu diuiſor minor eſt vnitate (64); ergo etiam diuidendus minor eſt quoto: vt ergo e di-

uidendo fiat quotus, debet diuidendus augeri; vt autem fractio augeatur, debet eius numerator magis creſcere quam denominator (67, 70), adeoque debet numerator per aliquid maius, denominator per aliquid minus multiplicari; atqui ex hypotheſi in diuiſore denominator maior eſt numeratore: ergo debet numerator diuidendi multiplicari per denominatorem diuiſoris, et denominator diuidendi per numeratorem diuiſoris.

Pro caſu 2*do*. Quotus eſt ad diuidendum vt vnitas ad diuiſorem; ſed in hoc caſu diuiſor aequatur vnitati: ergo et diuidendus quoto: ergo vt ex diuidendo fiat quotus, debet diuidendus nihil mutari; vt autem fractio non mutetur, debet tam numerator eius, quam denominator aequaliter creſcere (73), ſeu per idem multiplicari; atqui ex hypotheſi in diuiſore denominator idem eſt cum numeratore: ergo debet numerator diuidendi multiplicari etc. vt ſupra.

Pro caſu 3*tio*. Quotus eſt ad diuidendum vt vnitas ad diuiſorem; ſed in hoc caſu diuiſor maior eſt vnitate: ergo etiam diuidendus maior eſt quoto: ergo vt ex diuidendo fiat quotus, debet diuidendus minui; vt autem fractio minuatur, debet eius numerator minus creſcere, quam denominator (67, 70), adeoque debet numerator per aliquid minus, denominator per aliquid maius multiplicari; atqui ex hypotheſi in diuiſore denominator minor eſt numeratore: ergo debet numerator diuidendi multiplicari etc. vt ſupra.

87. Si diuiſor vel diuidendus fuerit quantitas integra, ei pro denominatore ſubſcribatur vnitas, tum fiat operatio vti ſupra dictum eſt.

88. Imo ſufficiet quantitatem integram ducere in denominatorem fractionis, et producto numeratorem ſubſcribere, ſi quantitas integra ſit per fractionem diuidenda; aut productum ſubſcribere numeratori, ſi fractio ſit per quantitatem integram diuidenda. E. g. $2a : \frac{3}{5} = \frac{2a}{1} : \frac{3}{5} = \frac{10a}{3}$. Similiter $\frac{3}{5} : 2a = \frac{3}{5} : \frac{2a}{1} = \frac{3}{10a}$.

# EXEMPLA.

I. $$\frac{2a^{2m+1}b^2}{6c^{m+2}} : \frac{2a^{2m-2}b^3}{3c^2} = \frac{6a^{2m+1}b^2c^2}{12a^{2m-2}b^3c^{m+2}}$$

$$= \frac{a^3}{2bc^m}.$$

II. $\frac{11}{15} : \frac{44}{5} = \frac{55}{660} = \frac{1}{12}$.

III. $$\left\{8abc + \frac{12b^3c}{c} - \frac{4ad^2}{b} - \frac{6b^2d^2}{bc}\right\} :$$

$$\left\{2a + \frac{3b^2}{c}\right\} = \left\{\frac{8ab^2c^2 + 12b^4c - 4ad^2c - 6b^2d^2}{bc}\right\} : \left\{\frac{2abc + 3b^3}{bc}\right\}$$

$$= \frac{8ab^2c^2 + 12b^4c - 4ad^2c - 6b^2d^2}{2abc + 3b^3}$$

$$= 4bc - \frac{2d^2}{b}.$$

IV. $(32 + \frac{24}{15}) : (8 - \frac{4}{5}) = \frac{504}{15} : \frac{36}{5}$
$= \frac{2520}{540} = 4\frac{2}{3}$.

Scholion. Quemadmodum multiplicatio exploratur diuiſione facti per vnum factorem, vt in his exemplis fecimus, in quibus ſuperiora multiplicationum exempla diuidendo comprobauimus; ita bonitatem diuiſionis patefaciet multiplicatio, ſi nempe diuiſor ductus in quotum reſtituat diuidendum (53).

89. Problema. *Quamlibet fractionem ope diuiſionis in ſeriem infinitam reſoluere.*

Resolut. Quoniam fractio eſt quotus, qui oritur e numeratore per denominatorem diuiſo (65), euidens eſt fractionem aequalem fore ſeriei, quae facta reapſe diuiſione pro quoto enaſcitur. Igitur cum fractionis cuiusuis denominator poſſit exhiberi per quantitatem complexam $a+b$, fractio quaeuis reuocari poteſt ad hanc expreſſionem: $\frac{c}{a+b}$, quae ſit in ſeriem infinitam reſoluenda. Diuidatur ergo $c$ per $a$, erit quotus $\frac{c}{a}$, qui ductus in totum diuiſorem $a+b$ dat factum $\frac{ac}{a}+\frac{bc}{a}=c+\frac{bc}{a}$, quo e diuidendo $c$ ſublato remanet $-\frac{bc}{a}$. Reſiduum hoc rurſus diuidatur per $a$, erit ſecundus quotus $-\frac{bc}{a^2}$, qui ductus in totum diuiſorem dat fa-

ctum $-\frac{abc}{a^2}-\frac{b^2c}{a^2}=-\frac{bc}{a}-\frac{b^2c}{a^2}$, quo e diuidendo ſublato remanet $-\frac{b^2c}{a^2}$. Hoc denuo diuidatur per $a$, erit tertius quotus $-\frac{b^2c}{a^3}$, qui ductus in totum diuiſorem dat factum $\frac{ab^2c}{a^3}+\frac{b^3c}{a^3}=\frac{b^2c}{a^2}+\frac{b^3c}{a^3}$, quo e diuidendo ſublato remanet $-\frac{b^3c}{a^3}$. Si rurſus et hoc reſiduum per $a$ diuidatur, erit quartus quotus $-\frac{b^3c}{a^4}$. Quotis hiſce diligenter inſpectis iam patet lex, iuxta quam eorum ſeries progreditur, ita vt etiam ſine calculo vlteriore continuari poſſit in infinitum. En calculi praecedentis typum:

$$a+b\,(c)=\frac{c}{a}-\frac{bc}{a^2}+\frac{b^2c}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}+\frac{b^4c}{a^5}-\frac{b^5c}{a^6}+\frac{b^6c}{a^7}\text{ etc. in infin.}$$

c+

$$c + \frac{bc}{a}$$

$$-\frac{bc}{a}$$

$$-\frac{bc}{a} - \frac{b^2c}{a^2}$$

$$+\frac{b^2c}{a^2}$$

$$\frac{b^2c}{a^2} + \frac{b^3c}{a^3}$$

$$-\frac{b^3c}{a^3} \text{ etc.}$$

Si $a$ ſit $= 2$, $b = 1$, $c = 1$, erit $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$ etc.

Si $a$ ſit $= 3$, $b = 1$, $c = 1$, erit $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{4} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ etc.

Si $a$ ſit $= 1$, $b = 2$, $c = 1$, erit $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{3} = \frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32$ etc.

# SECTIO II.

## De compoſitione, et reſolutione potentiarum.

## CAPVT I.

### *De natura, et geneſi Potentiarum.*

90. *Potentia* vel *dignitas* quantitatis cuiuſpiam eſt factum, quod oritur, ſi ea quantitas in vnitatem ſemel, aut ſaepius ducatur: ipſa vero illa quantitas, quae hac multiplicatione potentiam gignit, *rad.x* adpellatur. E. g. $a^m$ eſt potentia, cuius radix eſt quantitas $a$, quae toties ducta eſt in vnitatem, quot in $m$ ſunt vnitates.

91. Coroll. Cum ergo exponentes indicent, quoties ſit quantitas aliqua in vnitatem ducta (16), patet indicari ab exponentibus, quoti gradus quaeuis potentia ſit. E. g. $a$ eſt potentia prima; $a^2$ eſt potentia ſecunda, ſeu *quadratum*; $a^3$ eſt potentia tertia, ſeu *cubus*; $a^\infty$ eſt potentia infiniti gradus; $a^m$ eſt potentia quaeuis indeterminata.

92. Radix comparate ad quadratum dicitur *radix quadrata*; comparate ad cubum *radix cubica;* comparate ad quartam potentiam *radix quarta*, et ſic deinceps. Eſt autem ſignum radicis quadratae $\sqrt[2]{}$ vel $\sqrt{}$ ; radicis cubicae $\sqrt[3]{}$ ; radicis quartae $\sqrt[4]{}$ etc. radicis indeterminatae $\sqrt[m]{}$ : quantitas vero, cui tale ſignum praefixum eſt, *radicalis*; quantitas ſigno ipſi radicali impoſita *exponens radicis* nuncupatur. Quando deſignanda eſt radix quantitatis complexae, ea plerumque parentheſi includitur ſigno radicali praefixo hunc in modum: $\sqrt[3]{}(a+b)$: interdum ſic ſcribitur: $\sqrt[3]{\overline{a+b}}$. Ipſae etiam potentiae quantitatum complexarum ſaepe indicantur tantum hac ratione: $(a+b)^2$, vel $\overline{a+b}^2$.

93. COROLL. 1. Si ergo radix bis in vnitatem, ſeu ſemel in ſe ducatur, naſcitur quadratum; ſi bis, cubus; ſi ter, quarta potentia etc. Quare exponens potentiae vnitate multatus indicat, quoties ſit radix in ſeipſam ducta. E. g. ad generandam potentiam $a^m$ radix in vnitatem duci debet vicibus $m$, in ſeipſam autem vicibus $m-1$.

94. COROLL. 2. Si radix in ſe ipſam, ſeu in radicem ſemel ducitur, naſcitur quadratum; ſi in quadratum, naſcitur cubus; ſi in cubum, naſcitur quarta potentia, et ſic deinceps. Hinc quaeuis vnitatis potentia eſt vnitas.

95. COROLL. 3. Omne adeo quadratum debet eſſe poſitiuum, cum radix tam poſitiua, quam negatiua ſemel in ſe ducta gignat poſitiuum factum

(48). Cubus radicis poſitiuae poſitiuus, at negatiuae negatiuus eſt, cum quadratum poſitiuum in radicem negatiuam ductum generet negatiuum factum (cit.). Omnis potentia quarta poſitiua eſt, cum cubus poſitiuus in radicem poſitiuam, aut negatiuus in negatiuam ductus factum poſitiuum progignat (cit.). Vniuerſe potentiae habentes exponentem parem 2, 4, 6, 8 etc, ſemper debent eſſe poſitiuae, poſſuntque radicem tam poſitiuam quam negatiuam habere: potentiae vero habentes exponentem imparem 1, 3, 5, 7 etc. poſſunt eſſe etiam negatiuae, et hae quidem negatiuas, poſitiuae autem poſitiuas radices habent.

96. Coroll. 4. Si ergo occurrat potentia negatiua habens pro exponente numerum parem, eius radix eſt *impoſſibilis*, ſeu *imaginaria*, cum nulla quantitas poſſit eiusmodi potentiam gignere. E. g. $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-a^4}$ ſunt radices impoſſibiles.

97. Coroll. 5. Cum fractio ad potentiam aliquam euehenda eſt, ea aliquoties in ſe duci, ac proinde numerator per ſemetipſum, et denominator per ſeipſum multiplicari debet (81). Quare cum in quauis fractione genuina maior ſit denominator, quam numerator (64), in ea euectione magis creſcit denominator, quam numerator, adeoque valor fractionis diminuitur (67, 70).

98. Problema. *Potentiam quamuis monomiam ad aliam dati exponentis euehere.*

Resolut. Exponens potentiae datae multiplicetur per exponentem potentiae quaeſitae. Demonstr. Quaeuis enim potentia monomia data repraeſentari poteſt per $a^m$, et quiuis

exponens potentiae quaeſitae per $m$: ergo ſi hic demonſtratum fuerit exponentem potentiae datae $m$ multiplicari debere per exponentem quaeſitae potentiae $n$, id erit generatim verum; hoc autem ſic demonſtratur. Vt $a^m$ eleuetur ad potentiam exponentis $n$, debet multiplicatione toties poni, quoties eſt vnitas in $n$; atqui $a^m$ multiplicatione toties ponere eſt exponentem eius $m$ toties ſibi addere, quoties eſt vnitas in $n$ (48), ſeu $m$ per $n$ multiplicare (40): ergo exponens potentiae datae $m$ ducendus eſt in exponentem $n$, vt habeatur exponens potentiae quaeſitae, quae eſt $a^{mn}$. Similiter $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$; item $(a^{-m})^{2m} = a^{-2m}$; item $(a^{-\frac{m}{n}})^n \neq a^{-\frac{mn}{n}} = a^{-m}$.

99. COROLL. Si quantitas eleuanda pluribus conſtet literis, facile adparet, ſingularum exponentes ducendos eſſe in datum exponentem. E. g. $(b^2a^m)^n = b^{2n}a^{mn}$; item $(a^3b^{-2})^2 = a^6b^{-4}$.

100. PROBLEMA. *Potentias datas addere, ſubtrahere, multiplicare, ac diuidere.*

RESOLUT. Quoniam potentiae algebraicae non aliud ſunt, quam quantitates exponentibus affectae (90, 91), earum additio, ſubtractio, multiplicatio, et diuiſio peraguntur iuxta regulas, quas de his calculis in ſuperioribus tradidimus.

101. THEOREMA. *Potentia habens pro exponente zerum aequatur vnitati.*

DEMONSTR. Omnis enim eiusmodi potentia repraeſentari poteſt per $a^0$, ergo ſi oſtendero $a^0$ aequari vnitati, id erit de omni tali potentia verum; hoc autem ſic oſtendo. Sit $a^m$ diuidendum per

$a^m$, erit $\frac{a^m}{a^m} = 1$, quia $a^m$ in $a^m$ ſemel continetur; ſed etiam ſi reipſa diuidatur, erit $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$ (57); atqui aequalia eidem tertio ſunt aequalia inter ſe: ergo $a^0 = 1$.

102. THEOREMA. *Potentia habens pro exponente fractionem poſitiuam aequatur radici habenti pro exponente eius fractionis denominatorem de potentia habente pro exponente numeratorem.*

DEMONSTR. Omnis enim eiusmodi potentia repraeſentari poteſt per $a^{\frac{m}{n}}$; ergo ſi oſtendero $a^{\frac{m}{n}}$ eſſe $= \sqrt[n]{a^m}$, id erit de omni tali potentia verum; hoc autem ſic oſtendo. Eleuetur $a^{\frac{m}{n}}$ ad potentiam exponentis $n$ prodibit $a^{\frac{mn}{n}}$ (58) $= a^m$: ergo $a^m$ eſt potentia $n$ reſpectu $a^{\frac{m}{n}}$: ergo viciſſim $a^{\frac{m}{n}}$ eſt radix $n$ reſpectu $a^m$, ſeu quod idem eſt $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

103. THEOREMA. *Potentia habens pro exponente quantitatem integram negatiuam aequatur ſuo coefficienti diuiſo per eandem potentiam, ſed exponentis poſitiui.*

DEMONSTR. Omnis enim eiusmodi potentia repraeſentari poteſt per $ba^{-m}$; ergo ſi oſtendero $ba^{-m}$ eſſe $= \frac{b}{a^m}$, id erit de omni tali potentia verum; hoc autem ſic oſtendo. Multiplicetur

$ba^{-m}$ per $ba^{2m}$, erit factum $b^2a^m$: ſi hoc factum diuidatur per vnum factorem, nempe per $ba^{2m}$, quotus erit alter factor, nempe $ba^{-m}$(55); erit ergo $\frac{b^2a^m}{ba^{2m}} = ba^{-m}$: iam valor prioris fractionis non mutatur, ſi tam numerator, quam denominator diuidatur per $ba^m$ (74): erit ergo $\frac{b}{a^m} = ba^{-m}$.

104. COROLL. 1. Si ergo coefficiens fuerit $=1$, erit potentia exponentis integri negatiui aequalis vnitati diuiſae per eandem potentiam, ſed exponentis poſitiui. E. g. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

105. COROLL. 2. Erit igitur viciſſim $\frac{b}{a^{-m}} = ba^m$: nam pro $a^{-m}$ ponendo $\frac{1}{a^m}$, erit $\frac{b}{a^{-m}} = \frac{b}{1} : \frac{1}{a^m} = \frac{ba^m}{1} = ba^m$. Eodem modo patet eſſe $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$

106. THEOREMA. *Potentia habens pro exponente fractionem negatiuam aequatur ſuo coefficienti diuiſo per radicem habentem pro exponente denominatorem illius fractionis de potentia habente pro exponente numeratorem, ſed poſitiuum.*

DEMONSTR. Omnis enim eiusmodi potentia repraeſentari poteſt per $ba^{\frac{-m}{n}}$; ergo ſi oſtendero $ba^{\frac{-m}{n}}$ eſſe $= \frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}$, id erit de omni tali poten-

tia verum; hoc autem ſic oſtendo. Multiplicetur $ba^{\frac{-m}{n}}$ per $ba^{\frac{2m}{n}}$, erit factum $b^2a^{\frac{m}{n}}$: ſi hoc factum diuidatur per vnum factorem, nempe per $ba^{\frac{2m}{n}}$, quotus erit alter factor, nempe $ba^{\frac{-m}{n}}$ (55): erit ergo $\frac{b^2a^{\frac{m}{n}}}{ba^{\frac{2m}{n}}} = ba^{\frac{-m}{n}}$: iam valor prioris fractionis non mutatur, ſi tam numerator, quam denominator diuidatur per $ba^{\frac{m}{n}}$ (74): erit ergo $\frac{b}{a^{\frac{m}{n}}} = ba^{\frac{-m}{n}}$; atqui pro denominatore $a^{\frac{m}{n}}$ ſubſtitui poteſt $\sqrt[n]{a^m}$ (102): ergo hoc ſubſtituto erit $\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}} = ba^{\frac{-m}{n}}$.

107. Coroll. 1. Si ergo coefficiens fuerit 1, erit potentia exponentis fracti negatiui aequalis vnitati diuiſae per radicem habentem pro exponente denominatorem illius fractionis de potentia habente pro exponente numeratorem, ſed poſitiuum, E. g. $a^{\frac{-m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

108. Coroll. 2. Igitur quaeuis quantitates radicales poſſunt exhiberi forma potentiarum omiſſo radicali ſigno, ſi nempe exponens quantitatis radicali sdiuidatur per exponentem radicis. E. g.

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{4}{3}};\ \sqrt[\frac{2}{3}]{\frac{a}{b}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{a^3}{b^3}}$$

109. **Problema.** *Radicem quamuis binomiam euehere ad quamcunque potentiam determinatam.*

Reſolut. Cum quaeuis radix binomia repraeſentari poſſit per $a+b$, ducatur $a+b$ ſemel in ſeipſum, erit $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Hoc rurſus ducatur in $a+b$, erit $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, et ſic deinceps eadem operatione continuata exſurgent ſequentes potentiarum formulae.

$(a+b)^1 = 1a^1 + 1b^1$.
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$
$(a+b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6$
$(a+b)^7 = 1a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + 1b^7$
$(a+b)^8 = 1a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + 1b^8$ etc.

Hinc autem adparet potentiás omnes cónſtare factis quibusdam literalibus, atque eorum coefficientibus; inſuper eruitur 1) facta potentiarum literalia reperiri, ſi ſcribantur infra ſe inuicem duae ſeries, quarum ſuperior incipiens a deſiderata potentia termini primi $a$ deſinat in 1; infe-

rior incipiens ab 1 deſinat in potentia deſiderata termini ſecundi $b$, e. g, pro potentia octaua:

$a^8, a^7, a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a^1, 1$

$1, b^1, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6, b^7, b^8$

deinde termini eiusdem ordinis in ſe ducantur; facta: $1a^8 + a^7b^1 + a^6b^2 + a^5b^3 + a^4b^4 + a^3b^5 + a^2b^6 + a^1b^7 + 1b^8$ exhibebunt facta literalia potentiae octauae radicis binomiae $a+b$.

2) Coefficientes horum factorum hoc pacto inueniri. Exponentibus termini primi $a$ ſubſcribantur exponentes termini ſecundi $b$ tanquam denominatores hoc modo:

$\frac{8}{1}, \frac{7}{2}, \frac{6}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{6}, \frac{2}{7}, \frac{1}{8},$

erit prima fractio $\frac{8}{1} = 8$ coefficiens termini ſecundi; factum e prima, et ſecunda, ſeu $\frac{8}{1}.\frac{7}{2} = 28$ coefficiens termini tertii; factum ex prima, ſecunda, et tertia, ſeu $\frac{8}{1}.\frac{7}{2}.\frac{6}{3} = 56$ coefficiens termini quarti, et ſic deinceps. Patet ergo methodus radicem binomiam ad quamuis potentiam euehendi.

110. Coroll. 1. Quodſi exponens potentiae deſideratae vocetur $m$, habebitur formula generalis euehendi radicem binomiam ad quamlibet potentiam indeterminatam, ponendo ſuperius $m$ pro exponente termini primi $a$. Erunt nimirum facta literalia $a^m + a^{m-1}b. + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3$ etc. Coefficiens vero termini ſecundi erit $\frac{m}{1}$; termini tertii erit $\frac{m.m-1}{1.\ 2.}$; termini quarti $\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}$; vnde formula naſcetur huiusmodi:

I. $a^m$

$+ \frac{m}{1} a^{m-1}b$

$$+\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}b^3$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^{m-4}b^4 \text{ etc.}$$

Et quia $a^{m-1}=\frac{a^m}{a}$; $a^{m-2}=\frac{a^m}{a^2}$; $a^{m-3}=\frac{a^m}{a^3}$ etc. his valoribus ſubſtitutis naſcetur altera haec formula:

II. $a^m$
$$+\frac{m}{1}\frac{a^m b}{a}$$
$$+\frac{m.m-1}{1.2}\frac{a^m b^2}{a^2}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}\frac{a^m b^3}{a^3}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\frac{a^m b^4}{a^4}\text{etc.}$$

111. Coroll. 2. Si in prima formula generali ſit $m=2$, ea in hanc abibit: $a^2+2ab+b^2$; reliqua membra ob $m-2=2-2=0$, erunt aequalia nihilo. Hinc quadratum radicis binomiae conſtat 1) quadrato termini primi $a^2$, 2) duplo termini vnius in alterum ducto $2ab$, 3) quadrato termini ſecundi $b^2$. Sic etiam quadratum numeri 6, ſeu $2+4=4+16+16=36$.

112. Coroll. 3. Si ſit $m=3$, formula generalis in hanc abibit: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; reliqua membra ob $m-3=3-3=0$, erunt aequalia nihilo. Hinc cubus radicis binomiae

conſtat 1) cubo termini primi $a^3$, 2) triplo quadrato termini primi in ſecundum $3a^2b$, 3) triplo quadrato ſecundi in primum $3ab^2$, 4) cubo termini ſecundi $b^3$. Sic etiam cubus numeri 5 ſeu $2+3=8+36+54+27=125$.

113. COROLL. 4. Si ſit $m=4$, formula generalis in hanc abibit: $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$; reliqua membra ob $m-4=4-4=0$, erunt aequalia nihilo. Hinc potentia quarta radicis binomiae conſtat 1) potentia quarta termini primi $a^4$, 2) quadruplo cubo termini primi in ſecundum $4a^3b$, 3) ſextuplo quadrato primi in quadratum ſecundi $6a^2b^2$, 4) quadruplo cubo ſecundi in primum $4ab^3$, 5) potentia quarta termini ſecundi $b^4$. Sic etiam quarta potentia numeri 4 ſeu $1+3=1+12+54+108+81=256$. Et ſic de aliis potentiis.

114. PROBLEMA. *Complere quadratum incompletum, in quo ſcilicet quadratum termini ſecundi deſideratur.*

RESOLUT. Quoniam in eiusmodi quadrato praeter quadratum termini primi adeſt praeterea factum e duplo termini ſecundi in primum (111) videatur, per quid terminus primus radicis ſit multiplicatus; id enim erit duplum ſecundi, adeoque eius dimidium erit terminus ſecundus, e quo ſi quadratum fiat, et addatur quadrato illi incompleto, habebitur quadratum completum. Omne autem eiusmodi quadratum duplici hac formula continetur: $x^2+ax$, et $x^2-ax$, vbi $x$ deſignat primum radicis terminum, $a$ termini ſecundi duplum: hinc terminus ſecundus in prima erit $\frac{1}{2}a$, in ſecunda $-\frac{1}{2}a$, ac termini ſecundi

quadratum vtrobique $\frac{1}{4}a^2$, quo addito erunt quadrata completa $a^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$, et $a^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$.

## EXEMPLA.

$$\text{I.}\quad \left.\begin{array}{l} n^2 + \dfrac{2an}{d} - n \\ x^2 + cx - 6x \end{array}\right\} \textit{Incompl.}$$

$$\left.\begin{array}{l} n^2 + \dfrac{2an}{d} - n + \dfrac{a^2}{d^2} - \dfrac{a}{d} + \frac{1}{4} \\ x^2 + cx - 6x + \frac{1}{4}c^2 - 3c + 9 \end{array}\right\} \textit{Compl.}$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{array}{l} n^2 - \dfrac{2\omega n}{d} - n \\ x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}ax \end{array}\right\} \textit{Incompl.}$$

$$\left.\begin{array}{l} n^2 - \dfrac{2\omega n}{d} - n + \dfrac{\omega^2}{d^2} + \dfrac{\omega}{d} + \frac{1}{4} \\ x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}ax + \frac{4}{36} + \frac{4}{24}a + \frac{1}{16}a^2 \end{array}\right\} \textit{Compl.}$$

115. PROBLEMA. *Radicem quamuis polynomiam euehere ad quadratum.*

RESOLUT. Si omnes termini radicis polynomiae demto vltimo ponantur $= a$, vltimus $= b$, euidens eſt radicem quamuis polynomiam haberi poſſe pro binomia, et repraeſentari per $a + b$: ac proinde formulam primam ſuperiorem (110) quibusuis radicibus euehendis ad quadratum accommodari poſſe.

Itaque 1) ſit ad quadratum euehenda radix trinomia $c+d+g$: ponatur $c+d=a$, $g=b$, erit factis pro $a$ et $b$ ſubſtitutionibus $(c+d+g)^2=$.

$$\left.\begin{array}{l} a^m = (c+d)^2 = c^2 + 2cd + d^2 \\ +\frac{m}{1}a^{m-1}b = (2c+2d)g = 2cg + 2dg \\ +\frac{m.m-1}{1.\,2}a^{m-2}b^2 = \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad g^2 \end{array}\right\}$$

$$= c^2 + 2cd + d^2 + 2cg + 2dg + g^2.$$

2) Sit ad quadratum euehenda radix quadrinomia $c+d+g+h$: ponatur $c+d+g=a$ $h=b$; erit adhibitis ſubſtitutionibus $(c+d+g+h)^2=$

$$\left.\begin{array}{l} a^m = (c+d+g)^2 = c^2 + 2cd + d^2 + 2cg \\ \qquad + 2dg + g^2 \\ +\frac{m}{1}a^{m-1}b = (2c+2d+2g)\,h = 2ch \\ \qquad + 2dh + 2gh \\ +\frac{m.m-1}{1.\,2}a^{m-2}b^2 = \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad h^2. \end{array}\right\}$$

$$= c^2 + 2cd + d^2 + 2cg + 2dg + g^2 + 2ch + 2dh + 2gh + h^2$$

116. COROLL. 1. Igitur quadratum cuiusuis radicis polynomiae conſtat 1) quadratis ſingulorum terminorum, 2) dupla ſumma praecedentium ducta in omnes ſequentes.

117. COROLL. 2. Et quidem ſi quadratum legitime ordinatum eſt, partes hoc ordine ſe excipiunt: quadratum termini primi; duplum primi ductum in ſecundum; quadratum ſecundi; duplum primi et ſecundi ductum in tertium; quadratum tertii; duplum primi, ſecundi, et tertii ductum in quartum; quadratum quarti etc.

118. PROBLEMA. *Radicem quamuis polynomiam euehere ad cubum.*

RESOLUT. Si omnes termini radicis demto vltimo ponantur $= a$, vltimus $= b$, euidens eſt radicem quamuis polynomiam poſſe haberi pro binomia, et repraeſentari per $a + b$; ac proinde formulam primam ſuperiorem (110) quibusuis radicibus euehendis ad cubum accommodari poſſe.

Itaque 1) ſit euehenda ad cubum radix trinomia $c + d + g$: ponatur $c + d = a$ $g = b$, erit factis pro $a$ et $b$ ſubſtitutionibus $(c + d + g)^3 =$

$$\left.\begin{aligned} a^m &= (c+d)^3 = c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \\ + \tfrac{m}{1}a^{m-1}b &= 3(c^2 + 2cd + d^2)g = 3c^2g + 6cdg \\ &\qquad + 3d^2g \\ + \frac{m.m-1}{1.\ 2}\, a^{m-2}b^2 &= 3\,(c+d)\,g^2 = 3cg^2 \\ &\qquad + 3dg^2 \\ + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}\, a^{m-3}b^3 &= \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad g^3 \end{aligned}\right\}$$

$$= c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 + 3c^2g + 6cdg + 3d^2g + 3cg^2 + 3dg^2 + g^3.$$

2) Sit euehenda ad cubum radix quadrinomia $c + d + g + h$: ponatur $c + d + g = a$ $h = b$: erit adhibitis ſubſtitutionibus $(c + d + g + h)^3 =$

$$
\begin{aligned}
a^m &= (c+d+g)^3 = c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \\
&\quad + 3c^2g + 6cdg + 3d^2g + 3cg^2 \\
&\quad + 3dg^2 + g^3 \\
+ \tfrac{m}{1} a^{m-1} b &= 3(c^2 + 2cd + d^2 + 2cg + 2dg + g^2)h \\
&= 3c^2h + 6cdh + 3d^2h + 6cgh \\
&\quad + 6dgh + 3g^2h \\
+ \frac{m.m-1}{1.\ 2} a^{m-2} b^2 &= 3(c+d+g)h^2 = 3ch^2 \\
&\quad + 3dh^2 + 3gh^2 \\
+ \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3} a^{m-3} b^3 &= \quad - \ - \ - \quad h^3 \\
&= c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 + 3c^2g + 6cdg + 3d^2g \\
&\quad + 5cg^2 + 3dg^2 + g^3 + 3c^2h + 6cdh + 3d^2h \\
&\quad + 6cgh + 6dgh + 3g^2h + 3ch^2 + 3dh^2 \\
&\quad + 3gh^2 + h^3.
\end{aligned}
$$

119. COROLL. I. Igitur cubus cuiusuis radicis polynomiae conſtat 1) cubis ſingulorum terminorum, 2) triplo quadrato ſummae praecedentium in ſequentes, 3) triplo quadrato cuiusuis ſequentis in ſummam praecedentium.

120. COROLL. 2. Et ſiquidem cubus legitime ordinatus eſt, partes hoc ordine ſe excipiunt: cubus termini primi; triplum quadratum primi ductum in ſecundum; triplum quadratum ſecundi ductum in primum; cubus ſecundi; triplum quadratum primi, et ſecundi ductum in tertium; triplum quadratum tertii in primum, et ſecundum; cubus tertii; triplum quadratum primi, ſecundi et tertii in quartum; triplum quadratum quarti in primum, ſecundum, et tertium; cubus quarti etc.

SCHO-

Scholion. In potentiis algebracicis partes hae, e quibus coaleſcunt, facile incurrunt in oculos: at in potentiis numerorum veluti permiſtae, et confuſae latent; quare diligenter videndum erit, quem quaeque locum in potentia obtineat. Sit radix binomia 30 + 4 euehenda ad quadratum: erit illud = 900 + 240 + 16 = 1156. Quoniam pars ſecunda radicis vnitates, prima decades ſignificat, quadratum vnitatum in loco dextimo, factum ex vnius termini duplo in alterum in loco ſecundo, quadratum decadum in loco tertio terminari debet. Sit radix trinomia 200 + 40 + 3 euehenda ad quadratum, erit illud = 40000 + 16000 + 1600 + 1440 + 9 = 59049. Quoniam pars tertia radicis vnitates, ſecunda decades, prima centenarios denotat, quadratum tertiae terminari debet in loco a dextris primo; factum ex duplo ſecundae in tertiam in loco ſecundo; quadratum ſecundae, et factum ex duplo primae in tertiam in loco tertio, duplum primae in ſecundam in loco quarto, quadratum denique primae in loco quinto. Eadem eſt de aliis radicibus polynomiis, deque aliis earum potentiis ratiocinatio. Vnde eruitur haec animaduerſio vſui in ſequentibus futura: nimirum quot quaeuis radicis pars habet poſt ſe notas, bis totidem habebit poſt ſe eiusdem quadratum, ter totidem eiusdem cubus, quater totidem eiusdem potentia quarta, et ſic porro. Hinc ſi in quadrato poſt ſingulas duas notas a dextris inchoando ponatur virgula, in cubo poſt tres, in quarta potentia

poſt quatuor, et generatim in quauis potentia poſt tot notas, quot habet exponens potentiae vnitates, radix potentiae totidem habebit notas, quot in potentia fuerint membra virgulis diſtincta.

# CAPVT II.

## *De extractione Radicum e potentiis algebraicis.*

121. **R**adicem *extrahere* eſt e data potentia radicem eruere, ſeu quantitatem, quae ſcilicet in ſe aliquoties ducta potentiam illam generauit. E. g. extrahere radicem quadratam, vel cubicam ex $a^6$, eſt indagare quantitatem $a^3$ vel $a^2$, quae ſemel in ſe ducta generet quadratum $a^6$, aut bis in ſe ducta cubum $a^6$.

122. Coroll. 1. Quare radicum extractio contraria eſt potentiarum compoſitioni: et potentiae ſicuti coaleſcunt multiplicatione, ita diſſuuntur, inque ſuas radices reſoluuntur diuiſione.

123. Coroll. 2. Interdum radices *ſurdae*, vel *irrationales* occurrunt, quae ſcilicet nullis numeris poſſunt exprimi, vt eſt $\sqrt{2}$. Quum ergo radix huiusmodi quaeritur, talis quantitas indagatur, quae capax ſit producendi potentiam ad datam quantitatem proxime accedentem: e.g. ſi quaeratur $\sqrt{12}$, inueſtigatur numerus, cuius quadratum proxime accedat ad 12.

124. PROBLEMA. *E data potentia monomia radicem quamlibet extrahere.*

RESOLUT. Diuidatur exponens potentiae per exponentem datae radicis, et habebitur exponens radicis deſideratae. Nam omnis potentia monomia repraeſentari poteſt per $a^m$, et omnis radix extrahenda per radicem $\sqrt[n]{\phantom{a}}$, atqui $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (102). Hinc ſi radix quadrata quaeratur exponens potentiae datae diuidendus eſt per 2, ſi cubica per 3 etc. e. g. $\sqrt{a^8} = a^{\frac{8}{2}} = a^4$; $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$.

125. PROBLEMA. *E data potentia polynomia radicem quadratam extrahere.*

RESOLUT. Ordinetur propoſita potentia ſecundum exponentes cuiusdam literae, ita vt maximus exponens primo loco ſit (12); deinde obſeruentur hae regulae:

1) Extrahatur radix quadrata e primo termino (124) et ſcribatur poſt potentiam parentheſi incluſam: tum radicis huius quadratum e data potentia ſubtrahatur, ac notetur primum reſiduum.

2) Per duplum radicis inuentae reſiduum primum diuidatur, et quotus ſcribatur pro ſecundo radicis termino; deinde quotus hic ducatur tam in ſe, quam in duplum termini prioris, ſeu in diuiſorem, et ſublatis hiſce productis notetur ſecundum reſiduum.

3) Per duplum duarum radicum iam inuentarum diuidatur ſecundum reſiduum; tum ſcribatur quotus pro tertio termino radicis, qui duca-

tur tam in ſe, quam in duplum terminorum praecedentium, ſeu in diuiſorem, et ſublatis hiſce productis notetur tertium reſiduum.

4) Per duplum radicum trium iam inuentarum diuidatur tertium reſiduum, ac eadem conſtanter lege continuetur operatio dum vel nihil ſuperſit e data potentia, vel abeatur in ſeriem quamdam infinitam. Si propoſita potentia fractio fuerit, per easdem regulas extrahatur radix tam e numeratore, quam e denominatore (97).

Demonstr. Radix quadrata rite inuenta eſt, ſi eius quadratum aequale ſit potentiae datae: eſt autem aequale, ſi ab ea ſubductum nihil relinquat: ergo quadratum inuentae radicis tolli debet a data potentia, vt adpareat radicem eſſe legitimam. Iam vero quadratum radicis cuiusuis polynomiae conſtat quadratis ſingulorum terminorum, et duplo cuiusuis termini in omnes ſequentes (116): ergo haec debent tolli a data potentia; atqui per reg. 1 tollitur quadratum termini primi; per reg. 2 quadratum termini ſecundi, et factum ex duplo primi in ſecundum; per reg. 3 quadratum termini tertii, et factum ex duplo primi, et ſecundi in tertium etc. ergo per has regulas radix legitima inuenitur.

## EXEMPLA.

$$= a^2 + 3ab - 2b^2$$

I. $\sqrt{(a^4 + 6a^3b + 5a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4)}$

$a^4$

$-$

$0$

1. *Diuiſ.* $2a^2(6a^3b+5a^2b^2-12ab^3+4b^4)$ 1 *reſid.*

$$\frac{6a^3b+9a^2b^2}{0}$$

2. *Diuiſ.* $2a^2+6ab(-4a^2b^2-12ab^3+4b^4)$ 2. *reſid.*

$$\frac{-4a^2b^2-12ab^3+4b^4}{0 \quad 0 \quad 0}$$

II. $\sqrt{(b^2-2bd+d^2+2bc-2dc+c^2)}$
$= b-d+c$

$$\frac{b^2}{0}$$

1. *Diuiſ.* $2b\,(-2bd+d^2+2bc-2dc+c^2)$ 1 *reſid.*

$$\frac{-2bd+d^2}{0 \quad 0}$$

2 *Diuiſ.* $2b-2d\,(2bc-2dc+c^2)$ 2 *reſid.*

$$\frac{2bc-2dc+c^2}{0 \quad 0 \quad 0}$$

III. $$\sqrt{\left\{\frac{9c^2-12cdx+4d^2x^2+24cfy}{y^4+4y^3-8y} \quad \frac{-16dfxy+16f^2y^2}{+4}\right\}}$$
$$=\frac{3c-2dx+4fy}{y^2+2y-2}.$$

IV. $$\sqrt{(a^2+x^2)}=a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}$$
$$-\frac{5x^8}{128a^7}+\frac{7x^{10}}{256a^9}$$ etc. in infin.

Scholion. Iuuat in tironum gratiam duo ex allatis exemplis minutatim perſequi. Igitur in primo ordinata potentia ſecundum exponentes li-

terae $a$ (poterat perinde ordinari etiam ſecundum exponentes literae $b$) extrahatur radix $a^2$ ex $a^4$, et ſcribatur poſt potentiam; deinde eius quadratum $a^4$ ſubtrahatur e data potentia. Primus reſidui primi terminus $6a^3b$ diuidatur per duplum radicis inuentae $2a^2$, et quotus $3ab$ ſcribatur pro ſecundo radicis termino, qui tam in diuiſorem, quam in ſeipſum ductus dat factum $6a^3b + 9a^2b^2$, quo ſubtracto habebitur reſiduum ſecundum. Radix iam inuenta $a^2 + 3ab$ duplicetur, et per primum eius terminum $2a^2$ diuidatur primus reſidui ſecundi terminus $-4a^2b^2$, et quotus $-2b^2$ ſcribatur pro tertio radicis termino, qui tam in totum diuiſorem, quam in ſe ipſum ductus dat factum $-4a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4$, quo ſubducto nihil remanet, ac proinde radix quaeſita eſt $a^2 + 3ab - 2b^2$.

In quarto exemplo radix termini primi $a$ ſcribatur poſt potentiam, eiusdemque quadrato e data potentia ſubtracto remanet $x^2$, quod diuiſum per $2a$ nempe per duplum radicis iam inuentae dat ſecundum radicis terminum $\frac{x^2}{2a}$, qui tam in diuiſorem, quam in ſe ipſum ductus dat factum $x^2 + \frac{x^4}{4a^2}$; quo ex $x^2$ ſubducto remanet reſiduum ſecundum $-\frac{x^4}{4a^2}$. Si hoc alterum reſiduum diuidatur per duplum radicum iam inuentarum nempe per $2a + \frac{x^2}{a}$, habebitur tertius radicis terminus $-\frac{x^4}{8a^3}$, qui tam in totum diuiſorem

quam in ſeipſum ductus dat factum ad minimos terminos reductum $-\frac{x^4}{4a^2}-\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{64a^6}$, quo ex $-\frac{x^4}{4a^2}$ ſubducto remanet reſiduum tertium $\frac{x^6}{8a^4}-\frac{x^8}{64a^6}$; iſto per duplum radicum hactenus inuentarum diuiſo inuenitur quartus radicis terminus $\frac{x^6}{16a^5}$, et ſic deinceps in infinitum. At pro huiusmodi radicibus eruendis proferemus infra formulam paulo commodiorem.

126. Problema. *E data potentia polynomia radicem cubicam extrahere.*

Resolut. Ordinata vt ante potentia peragatur operatio ſequentibus legibus:

1) E primo potentiae datae termino extrahatur radix cubica (124), ſcribaturque poſt potentiam; tum cubus eiusdem e data potentia ſubtrahatur, ac notetur primum reſiduum.

2) Per triplum quadratum radicis inuentae diuidatur reſiduum primum, et quotus ſcribatur pro ſecundo radicis termino: deinde quotus hic ducatur in diuiſorem; triplum eiusdem quadratum ducatur in primum radicis terminum; ac denique fiat ex eodem cubus: tribus hiſce factis e reſiduo primo ſublatis notetur reſiduum ſecundum.

3) Per triplum quadratum ſummae radicum iam inuentarum diuidatur reſiduum ſecundum, et quotus ſcribatur pro tertio radicis termino: deinde quotus hic ducatur in totum diuiſorem; triplum eiusdem quadratum ducatur in ambos

praecedentes radicis terminos; ac denique fiat ex eodem cubus; tribus hiſce factis e reſiduo ſecundo ſublatis notetur reſiduum tertium.

4) Per triplum quadratum ſummae radicum iam inuentarum diuidatur reſiduum tertium, et obtinebitur quartus radicis terminus, qui eo plane modo tractandus eſt, quo ceteros repertos tractauimus. Atque haec operandi ratio tam diu producatur, dum vel nihil ſuperſit, vel abeatur in ſeriem quamdam infinitam. Quod ſi potentia propoſita fractio fuerit, per easdem regulas extrahatur radix cubica tam ex numeratore, quam ex denominatore (97).

Demonstr. Radix cubica rite inuenta eſt, ſi eius cubus aequalis ſit potentiae datae: eſt autem aequalis, ſi ab ea ſubductus nihil relinquat: ergo cubus inuentae radicis tolli debet a data potentia, vt adpareat radicem eſſe legitimam. Iam vero cubus radicis cuiusuis polynomiae conſtat cubis ſingulorum terminorum, triplo quadrato ſummae praecedentium in ſequentes, et triplo quadrato cuiusuis ſequentis in ſummam praecedentium (119): ergo haec debent tolli a data potentia; atqui per reg. 1. tollitur cubus termini primi: per reg. 2 triplum quadratum primi in ſecundum, ſecundi in primum, et cubus ſecundi; per reg. 3 triplum quadratum ſummae primi, ac ſecundi in tertium, triplum quadratum tertii in ſummam praecedentium, et cubus tertii etc. ergo per has regulas radix legitima inuenitur.

# EXEMPLA.

I. $\sqrt[3]{}\ (x^6 + 3bx^5 + 3b^2x^4 + 3cx^4 + b^3x^3$
$+ 6bcx^3 + 3b^2cx^2 + 3c^2x^2 + 3bc^2x + c^3)$
$= x^2 + bx + c$

$x^6$

$0$

1 *Diuiſ.* $3x^4\ (3bx^5 + 3b^2x^4 + 3cx^4$
$3bx^5 + 3b^2x^4$

$0 \quad 0$

$+ b^3x^3 + 6bcx^3 + 3b^2cx^2 + 3c^2x^2 + 3bc^2x$
$+ b^3x^3$

$0$

$+ c^3)$ 1 *reſid.*

2 *Diuiſ.* $3x^4 + 6bx^3 + 3b^2x^2$
$(3cx^4 + 6bcx^3 + 3b^2cx^2 + 3c^2x^2 + 3bc^2x + c^3)$ 2. *Reſid.*
$3cx^4 + 6bcx^3 + 3b^2cx^2 + 3c^2x^2 + 3bc^2x + c^3$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

II. $\sqrt[3]{}\ (b^3 - 3b^2d + 3b^2c + 3bd^2 - 6bdc$
$b^3$

$0$

$+ 3bc^2 - d^3 + 3d^2c - 3dc^2 + c^3)$
$= b - d + c.$

1 *Diuiſ.* $3b^2\ (-3b^2d + 3b^2c + 3bd^2 - 6bcd$
$-3b^2d \qquad + 3bd^2$

$0 \quad 0$

$$+ 3bc^2 - d^3 + 3d^2c - 3dc^2 + c^3) \quad 1 \textit{ reſid.}$$
$$- d^3$$
$$\overline{\qquad\qquad 0 \qquad\qquad}$$

$$2 \textit{ Diuiſ.} \quad 3b^2 - 6bd + 3d^2$$
$$(3b^2c - 6bcd + 3bc^2 + 3d^2c - 3dc^2 + c^3) \; 2. \textit{ Reſid.}$$
$$3b^2c - 6bcd + 3bc^2 + 3d^2c - 3dc^2 + c^3$$
$$\overline{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}$$

$$\text{III. } \sqrt[3]{\left\{\frac{(8c^3 + 36dc^2 + 54d^2c + 27d^3 + 72ac^2 + 216adc + 162ad^2 + 216a^2c + 324a^2d + 216a^3}{c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 + 3c^2g + 6odg + 3d^2g + 3cg^2 + 3dg^2 + g^3}\right\}} = \frac{2c + 3d + 6a}{c + d + g}$$

$$\text{IV. } \sqrt[3]{(a^3 + x^3)} = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8} \text{ etc. in infin.}$$

SCHOLION. Iterum in tironum gratiam bina ex allatis exemplis vberius explanabimus. Igitur in primo ordinata potentia ſecundum exponentes literae $x$ ( poterat ordinari etiam iuxta exponentes literae $c$, vel $b$), extrahatur radix $x^2$ ex $x^6$, et ſcribatur poſt potentiam; deinde cubus eiusdem $x^6$ ſubtrahatur e data potentia, noteturque reſiduum primum. Primus reſidui terminus $3bx^5$ diuidatur per triplum quadratum radicis iam in-

uentae, ſeu per $3x^4$, et quotus $bx$ ſcribatur pro ſecundo radicis termino, ducaturque in diuiſorem, triplum vero eius quadrati $3b^2x^2$ in praecedentem radicis terminum, ac denique fiat ex eodem cubus $b^3x^3$: his e reſiduo primo ſublatis notetur alterum reſiduum, quod diuiſum per triplum quadratum ſummae terminorum radicis iam inuentorum, ſeu per $3x^4 + 6bx^3 + 3b^2x^2$, dat pro quoto tertium radicis terminum $c$, qui ducendus eſt in totum diuiſorem, triplum autem eius quadratum $3c^2$ in terminos radicis praecedentes, ac demum faciendus eſt ex eodem cubus $c^3$: tribus hiſce factis ſubductis nihil remanet, ac proinde radix quaeſita eſt $x^2 + bx + c$.

In exemplo quarto radix cubica termini primi $a$ poſt datam potentiam ſcribatur, cubusque eiusdem $a^3$ ſubtrahatur, remanet $x^3$, quod diuiſum per triplum quadratum radicis iam inuentae, ſeu per $3a^2$ dat ſecundum radicis terminum $\frac{x^3}{3a^2}$ qui ducendus eſt in diuiſorem $\frac{3a^2}{1}$, dabitque factum $\frac{3a^2x^3}{3a^2} = x^3$: deinde triplum eiusdem quadratum $\frac{3x^6}{9a^4} = \frac{x^6}{3a^4}$ ducendum eſt in terminum primum radicis, naſceturque factum huiusmodi $\frac{ax^6}{3a^4} = \frac{x^6}{3a^3}$; faciendus denique ex eodem cubus $\frac{x^9}{27a^6}$: tribus hiſce factis ex $x^3$ ſublatis remanet

ſecundum reſiduum $-\frac{x^6}{3a^3}-\frac{x^3}{27a^6}$. Reſiduum hoc diuiſum per triplum quadratum ſummae terminorum iam inuentorum, ſeu per $3a^2+\frac{2x^3}{a}+\frac{x^6}{3a^4}$ dat tertium radicis terminum $-\frac{x^6}{9a^5}$. Terminus hic ducatur in totum diuiſorem, detque factum $-\frac{x^6}{3a^3}-\frac{2x^9}{9a^6}-\frac{x^{12}}{27a^9}$; tum triplum eius quadratum in ſummam terminorum praecedentium, et naſcetur factum $\frac{x^{12}}{27a^9}+\frac{x^{15}}{81a^{12}}$; denique fiat ex eodem cubus $-\frac{x^{18}}{729a^{15}}$: his ergo tribus e ſecundo reſiduo ſubtractis obtinebitur reſiduum tertium $\frac{5x^9}{27a^6}+\frac{x^{12}}{27a^9}-\frac{x^{12}}{27a^9}-\frac{x^{15}}{81a^{12}}+\frac{x^{18}}{729a^{15}}$. Reſiduum hoc diuiſum per triplum quadratum ſummae terminorum iam inuentorum dabit pro quoto quartum radicis terminum $\frac{5x^9}{81a^8}$, atque ita deinceps in infinitum. Verum huiusmodi ſeries longe facilius inuenietur ope ſequentium problematum.

127. PROBLEMA. *Conſtruere formulam generalem pro extrahendis quibusuis radicibus etiam irrationalibus.*

RESOLUT. Ponatur $a = P$, $b = PQ$, adeoque $Q = \frac{b}{a}$; valoribus hiſce ſubſtitutis formula generalis ſecunda (110) in hanc abibit:

$$P^m$$
$$+ \frac{m}{1} P^m Q$$
$$+ \frac{m.m-1}{1.2} P^m Q^2$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} P^m Q^3 \text{ etc.}$$

Fiat rurſus $P^m = A$, erit $\frac{m}{1} P^m Q = \frac{m}{1} AQ$

Fiat $\frac{m}{1} P^m Q$, ſeu $\frac{m}{1} AQ = B$, erit $\frac{m.m-1}{1.2}$
$P^m Q^2 = - - - - - - - - \frac{m-1}{2} BQ$

Fiat $\frac{m-1}{2} BQ = C$, erit $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$
$P^m Q^3 = - - - - - - - - - \frac{m-2}{3} CQ$

Fiat $\frac{m-2}{3} CQ = D$, erit $\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$
$P^m Q^4 = - - - - - - \frac{m-3}{4} DQ$ etc.

Vnde imprimis quidem eruitur noua formula binomii $a+b$ ad quamcunque potentiam indeterminatam $m$ euehendi, nempe $(a+b)^m =$

$$P^m$$
$$+ \frac{m}{1} AQ$$

$+\frac{m-1}{2}BQ$

$+\frac{m-2}{3}CQ$

$+\frac{m-3}{4}DQ$ etc.

Iam ſi hic pro integro exponente $m$ ſubſtituatur exponens fractus $\frac{m}{n}$, naſcetur ſequens formula, cuius ope radix quaeuis extrahi poſſit:

$P^{\frac{m}{n}}$

$+\frac{m}{n}AQ$

$+\frac{m-n}{2n}BQ$

$+\frac{m-2n}{3n}CQ$

$+\frac{m-3n}{4n}DQ$ etc.

Nempe ſi exponens $\frac{m}{n}$ explicetur per numerum fractum, ſeu per exponentem quantitatis radicalis (102) e.g per $\frac{1}{2}$ pro extrahenda radice quadrata, per $\frac{1}{3}$ pro cubica etc. ope huius formulae extrahi poterit radix quaecunque quantitatis $P+PQ$, ſeu $a+b$, vti patebit in exemplis ſequentibus. Imo ſi pro $n$ ponatur 1, et pro $m$ exponens potentiae, ad quam $P+PQ$, ſeu

$a+b$ euehi debet, haec eadem formula inseruit etiam eleuandis ad quamcunque potentiam quantitatibus.

# EXEMPLA.

I. $\sqrt{(a^2+x^2)} = (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \frac{7x^{10}}{256a^9}$ etc. in infin.

II. $\sqrt[3]{(a^3+x^3)} = (a^3+x^3)^{\frac{1}{3}} = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}}$ etc. in infin.

III. $\frac{1}{\sqrt[3]{(y^3-a^2y)}} = (y^3-a^2y)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{y} + \frac{a^2}{3y^3} + \frac{a^4}{9y^5} + \frac{7a^6}{81y^7}$ etc. in infin.

IV. $\sqrt[5]{(c^5+c^4x-x^5)} = (c^5+c^4x-x^5)^{\frac{1}{5}} = c + \frac{c^4x - x^5}{5c^4} - \frac{2c^8x^2 + 4c^4x^6 - 2x^{10}}{25c^9}$ etc. in infinit.

SCHOLION. 1. Nimirum in primo exemplo $P = a^2$, $Q = \frac{x^2}{a^2}$, $m = 1$, $n = 2$, $A = P^{\frac{m}{n}} = a^{2\cdot\frac{1}{2}} = a$. $B = \frac{m}{n} AQ = \frac{x^2}{2a}$. $C = \frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{x^4}{8a^3}$. $D = \frac{m-2n}{3n} CQ = \frac{x^6}{16a^5}$ etc.

In ſecundo exemplo $P = a^3$, $Q = \frac{x^3}{a^3}$, $m = 1$ $n = 3$, $A = P^{\frac{m}{n}} = aaa^{\frac{1}{3}} = a$. $B = \frac{m}{n}$ AQ $= \frac{x^3}{3a^2}$. $C = \frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{x^6}{9a^5}$. $D = \frac{m-2n}{3n}$ $CQ = \frac{5x^9}{81a^8}$ etc.

In quarto exemplo $P = c^5$, $Q = \frac{c^4x - x^5}{c^5}$, $m = 1$, $n = 5$, $A = P^{\frac{m}{n}} = ccccc^{\frac{1}{5}} = c$. $B = \frac{m}{n}AQ = \frac{c^4x - x^5}{5c^4}$. $C = \frac{m-n}{2n}$ BQ $= -\frac{2c^8x^2 + 4c^4x^6 - 2x^{10}}{25c^9}$. etc.

Scholion. 2. Vt adpareat ope eiusdem formulae poſſe binomium euehi ad quamcunque potentiam, ſit $a+b$ eleuandum ad ſextam potentiam, erit $P = a$, $Q = \frac{b}{a}$, $m = 6$, $n = 1$; hinc A $= P^{\frac{m}{n}} = a^6$: $B = \frac{m}{n}AQ = 6a^5b$: $C = \frac{m-n}{2n}$ $BQ = 15a^4b^2$: $D = \frac{m-2n}{3n}CQ = 20a^3b^3$: E $= \frac{m-3n}{4n}DQ = 15a^2b^4$: $F = \frac{m-4n}{5n}EQ =$ $6ab^5$: $G = \frac{m-5n}{6n}FQ = b^6$; denique H

=

$= \frac{m - 6n}{7n}$ GQ $= 0$. Ergo $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$, prorſus vt ſupra inuenimus (109).

# CAPVT III.

## *De extractione Radicum e numeris.*

128. PROBLEMA. *E dato quouis numero, qui quidem ſit quadratum perfectum, radicem quadratam extrahere.*

RESOLUT. Pro numeris vltra duas notas non aſſurgentibus in promtu eſſe debet tabella potentias numerorum ſimplicium continens, quam iſthic adponimus, quaeque continuari poteſt pro arbitrio.

| I. | II. | III. | IV. | V. | VI. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 |
| 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 | 4096 |
| 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 | 15625 |
| 6 | 36 | 216 | 1296 | 7776 | 46656 |
| 7 | 49 | 343 | 2401 | 16807 | 117649 |
| 8 | 64 | 512 | 4096 | 32768 | 262144 |
| 9 | 81 | 729 | 6561 | 59049 | 531441 |

Sin autem numerus occurrat maior, extrahetur radix ſecundum has regulas:

1) A dextris inchoando poſt binas quasque numeri propoſiti notas inſeratur virgula: tot erunt in radice notae, quot erunt huismodi membra virgulis diſtincta (119. ſch.), quorum ſiniſtimum etiam vnica nota conſtare poteſt.

2) Cum in membro ſiniſtimo contineatur quadratum notae primae radicis (cit.), quaeratur in tabella ſuperiore numerus quadratus aequalis, vel proxime minor membro illo ſiniſtimo, et radix eius ponatur poſt numerum propoſitum parentheſi incluſum, eius vero quadratum ſubtrahatur a membro illo ſiniſtimo, et notetur reſiduum primum.

3) Adiungatur ad reſiduum, ſiquod manſit, membrum ſequens, in quo vna cum illo reſiduo contineri debet duplum termini primi radicis ductum in ſecundum, et ſecundi quadratum (119 ſch.), et quia factum e duplo primi in ſecundum terminatur in nota penultima, relicta poſtrema nota pro quadrato termini ſecundi, reliquum diuidatur per duplum termini primi, erit quotus ſecunda nota radicis; ſcribatur hic quotus poſt prius inuentam radicis notam, et ſimul diuiſori a dextris iungatur, totumque hoc in quotum ipſum ducatur, et factum, ſeu duplum termini primi ductum in ſecundum, ac quadratum ſecundi ſubtrahatur, noteturque ſecundum reſiduum.

4) Secundo reſiduo adiungatur membrum ſequens, et vtraque radicis nota iam inuenta vnius inſtar ſpectata eadem lege repetatur operatio dum nullum ſuperſit membrum deponendum. Si ope-

ratione vltima abſoluta nullum ſuperſit reſiduum, radix accurate eſt eruta: ſiquid etiamnum remaneat, indicio eſt propoſitum numerum non eſſe quadratum, habere proinde radicem irrationalem.

DEMONSTR. Eadem eſt, quae n. 125.

## EXEMPLA.

I. $\sqrt{(11,97,16)} = 346.$

9

1 *diuiſ.* 6 ( 29,7 ) *reſid.* 1 *cum membr. ſequ.*

256

2 *diuiſ.* 68 (411,6) *reſid.* 2. *cum membr. ſequ.*

4116

0000

II. $\sqrt{(9,12,64,41)} = 3021$

9

1 *diuiſ.* 6 (012) *reſid.* 1 *cum membr. ſequ.*

00

2 *diuiſ.* 60 ( 126,4 ) *reſid.* 2 *cum membr. ſequ.*

120 4

3 *diuiſ.* 604 ) 604,1 ) *reſid.* 3 *cum membr. ſequ.*

604 1

0000

III. $\sqrt{(25,20,04,00)} = 5020$

IV. $\sqrt{(36,30,06,25)} = 6025.$

SCHOLION. Percurramus prima duo exempla. In primo facta per virgulas ſeparatione, conferatur membrum primum 11 cum tabella poten-

G 2

tiarum, reperietur in ea quadratum proxime minus 9: huius ergo quadrati radix 3 ſcribatur pro prima radicis nota, et 9 ab 11 ſubtrahatur. Ad reſiduum primum 2 adiungatur membrum ſequens 97, vt ſit 297: hoc relicta nota vltima 7 diuidatur per duplum radicis iam inuentae, ſeu per 6, erit quotus 4 ſecunda nota radicis: iungatur quotus 4 ad diuiſorem 6, vt ſit 64, et hoc ducatur in ipſum quotum 4, factumque 256 ſubtrahatur, ac notetur reſiduum ſecundum 41: huic adiungatur membrum ſequens 16, vt ſit 4116, hoc relicta nota vltima 6 diuidatur per duplum radicis hactenus inuentae 34, ſeu per 68, erit quotus 6 tertia nota radicis: denique iungatur quotus 6 ad diuiſorem 68, vt ſit 686, et hoc ducatur in ipſum quotum 6, factumque 4116 ſubtrahatur. Quia peracta hac ſubtractione neque reſtat quidquam, neque membrum vllum iam ſupereſt, radix quadrata numeri propoſiti eſt 346, quae ſemel in ſe ducta eundem numerum reſtituet.

In ſecundo exemplo membrum primum 9 in tabella quadratorum inuenitur, quare eius radix 3 pro prima radicis nota ſcribatur, et quadratum 9 a 9 ſubtrahatur. Quia reſiduum nullum eſt, deponatur ſolum membrum ſequens 12, et omiſſa nota vltima 2 per duplum radicis iam inuentae, ſeu per 6 diuidatur: quotus 0 pro ſecunda radicis nota ſcribatur, ſimulque diuiſori 6 adiungatur, vt ſit 60, quod ductum in 0 dat factum aequale nihilo, et hoc ſubtractum a 12 relinquit pro ſecundo reſiduo totum 12. Iungatur reſiduo huic membrum ſequens 64, vt ſit 1264,

quod omiſſa nota poſtrema 4 diuidatur per duplum radicis hactenus inuentae 30, nempe per 60, et quotus 2 ſcribatur pro tertia radicis nota, ſimulque iungatur diuiſori 60, vt ſit 602, quod ductum in ipſum quotum 2 dat factum 1204, quo ſubtracto remanet reſiduum tertium 60. Iungatur reſiduo huic membrum ſequens 41, vt ſit 6041, quod omiſſa nota poſtrema 1 diuidatur per duplum radicis hactenus inuentae 302, nempe per 604, et quotus 1 ſcribatur pro quarta radicis nota, ſimulque iungatur diuiſori 604, vt ſit 6041, quod ductum in ipſum quotum 1 dat factum 6041, quo ſubducto quia nihil remanet, nec vllum iam membrum ſupereſt, radix propoſiti numeri eſt 3021.

129. PROBLEMA. *Radicem quadratam per approximationem extrahere e numero, qui non ſit quadratum.*

RESOLUT. 1) Fiat operatio per regulas ſuperiores dum nullum amplius ſuperſit membrum e propoſito numero; peracta vltima ſubtractione remanebit aliquod reſiduum; huic tanquam numero integro pro denominatore ſubſcripta concipiatur vnitas, et adiungantur numeratori a dextris duo zeri, totidemque adiungi concipiantur denominatori; valor reſidui haud mutabitur (74). Iam cum tacitus ille denominator ſit 100, erit eius radix quadrata 10 mente duntaxat retinenda: e numeratore autem extrahatur radix per regulas ſuperiores ſpectando adiunctos zeros inſtar noui membri adiuncti; habebit radix inde extracta pro denominatore 10, ac proinde interiecta virgula ab integris radicis notis ſeparetur.

2) Si ex praecedente operatione aliquid remanſit, id habet ob geminos adiectos zeros pro denominatore 100. Adiungantur denuo numeratori huic reſiduo duo zeri, totidemque adiungi concipiantur etiam denominatori, qui proinde erit 10000, cuius radix quadrata eſt 100 mente duntaxat retinenda: e numeratore autem extrahatur radix vt ante, ſpectando adiectos zeros inſtar noui membri adiuncti; habebit ea radix pro denominatore 100. Eadem repetita operatione elicietur nota radicis habens pro denominatore 1000, 10000 etc. quae omnes cum a virgula incipiendo ordine ſe excipiant, earum denominatores omitti ſolent.

# EXEMPLA.

I. $\sqrt{(1,48)} = 12,165$ etc. $12 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000}$ etc.

II. $\sqrt{(11,90)} = 34,496$ etc. $= 34 + \frac{4}{10} + \frac{9}{100} + \frac{6}{1000}$. etc.

III. $\sqrt{(3,62,54)} = 190,404$ etc. $= 190 + \frac{4}{10} + \frac{0}{100} + \frac{4}{1000}$ etc.

SCHOLION. Nempe in exemplo primo extracta per regulas ſuperiores radice 12, adhuc remanet $4 = \frac{4}{1}$; adiunctis ergo ad 4 duobus zeris erit $4 = \frac{400}{100}$. Notetur mente radix denominatoris 10, e numeratore autem extrahatur hoc modo. Radix hactenus inuenta 12 duplicetur, perque eius duplum 24 diuidatur 400 omiſſa nota vltima 0, et quotus 1 habens pro denomi

natore 10 ſcribatur poſt 12 interiecta virgula: cetera deinde fiant vt ſupra (128). Peracta hac operatione remanebit $\frac{159}{100}$, cui ſi denuo addantur duo zeri, erit $\frac{159}{100} = \frac{15900}{10000}$, ac radix denominatoris mente retinenda = 100: extrahatur ergo radix e numeratore hoc modo. Radix hactenus inuenta 121 duplicetur, perque eius duplum 242 diuidatur 15900 omiſſa nota poſtrema 0, et quotus 6 habens pro denominatore 100 ſcribatur pro ſequente radicis nota, tum fiat conſueta operatio. Pro tertio reſiduo remanebit $\frac{1344}{10000}$, cui ſi rurſus addantur duo zeri, erit $\frac{1344}{10000} = \frac{134400}{1000000}$; ac radix denominatoris = 1000 mente retinenda; e numeratore autem elicietur 5 lege conſueta, nempe duplicando radicem hactenus inuentam 1216, et ſic deinceps.

130. PROBLEMA. *E dato quouis numero, qui quidem cubus perfectus ſit, radicem cubicam extrahere.*

RESOLUT. Pro numeris vltra tres notas non aſſurgentibus ad manum eſſe debet tabella, quam ſupra adiecimus (128). Si autem numerus occurrat maior, hoc pacto operandum erit:

1) A dextris inchoando poſt ternas quasque numeri propoſiti notas inſeratur virgula: tot erunt in radice notae, quot erunt huiusmodi membra virgulis diſtincta (119 ſch.), quorum ſiniſtimum etiam duabus, aut vnica nota conſtare poteſt.

2) Cum in membro ſiniſtimo contineatur cubus notae primae radicis (cit.), quaeratur in tabella (128) numerus cubicus aequalis, vel proxime minor membro illo ſiniſtimo, et radix eius pona-

tur poſt numerum propoſitum parentheſi incluſum, eius vero cubus ſubtrahatur e membro illo ſiniſtimo, et notetur reſiduum primum.

3) Adiungatur ad reſiduum, ſiquod manſit, membrum ſequens, in quo vna cum illo reſiduo contineri debet triplum quadratum termini primi radicis ductum in ſecundum, triplum quadratum ſecundi ductum in primum, et ſecundi cubus (119 ſch.): et quia ex his primum terminatur in nota antepenultima, ſecundum in penultima, tertium in vltima, relictis duabus poſtremis notis reliquum diuidatur per triplum quadratum radicis iam inuentae, erit quotus ſecunda nota radicis, quae ducatur in diuiſorem, ſeu in triplum quadratum termini primi, ac factum ſubtrahatur, et ad reſiduum adiungatur nota penultima e duabus illis relictis; latebit ibi triplum quadratum termini ſecundi ductum in primum: fiat ergo quadratum e termino ſecundo, tum triplicetur, ac ducatur in primum, et hoc factum ſubtrahatur; ad reſiduum adiungatur nota vltima e relictis; latebit ibi cubus termini ſecundi: fiat ergo e termino ſecundo cubus, ac ſubtrahatur, noteturque, ſi quod eſt reſiduum.

4) Secundo reſiduo adiungatur membrum ſequens: et vtraque radicis nota iam inuenta inſtar vnius ſpectata eadem repetatur operatio, atque ita reperietur tertia radicis nota. Reſiduo tertio denuo adiungatur membrum ſequens, ac tribus radicis notis iam inuentis inſtar vnius ſpectatis eadem lege fiat operatio, atque ita deinceps dum nullum ſuperſit membrum deponendum. Si operatione vltima abſoluta nullum ſuperſit reſi-

duum, radix accurate eſt inuenta: ſiquid etiamnum remaneat, indicio eſt propoſitum numerum non eſſe cubum, habere proinde radicem irrationalem.

DEMONSTR. Eadem eſt, quae n. 126.

## EXEMPLA.

I. $\sqrt[3]{(41,421,736)} = 346$

27

1 *diuiſ.* 27 (144,21) *reſid.* 1 *cum membr. ſeq.*

108

362

144

2181

64

2 *diuiſ.* 3468 (21177,36) *reſid.* 2 *cum memb. ſeq.*

20808

3693

3672

216

216

000

II. $\sqrt[3]{(143,877,824)} = 524$

III. $\sqrt[3]{(14,886,936)} = 246$

IV. $\sqrt[3]{\left\{\frac{140,608}{1,860,867}\right\}} = \frac{52}{123}$

Scholion Expendamus minutatim exemplum primum. Numero per virgulas rite ſeparato conferatur primum membrum 41 cum tabella potentiarum (128), inuenietur illic cubus proxime minor 27; huius proinde radix 3 ſcribatur pro prima radicis quaeſitae nota, et cubus 27 ſubtrahatur a primo membro 41, noteturque primum reſiduum 14, cui a dextris iungatur membrum ſequens 421, vt ſit 14421. Hoc omiſſis poſtremis duabus notis 21 diuidatur per radicis iam inuentae 3 triplum quadratum 27, et quotus 4 ſcribatur pro ſecunda radicis nota: haec ducta in diuiſorem dat factum 108; quod ſubductum a 144 relinquit 36, cui adiecta nota penultima e duabus relictis, habebitur 362, e quo ſi ſubducatur triplum quadratum termini ſecundi 4 ductum in primum, nempe 144, reſiduum erit 218, cui adiecta nota vltima e duabus relictis, habebitur 2181, in quo latet cubus termini ſecundi 64, quo proinde ſublato obtinebitur reſiduum ſecundum 2117, cui adiungatur membrum ſequens 736, vt ſit 2117736. Hoc omiſſis duabus poſtremis notis 36 diuidatur per radicis iam inuentae 34 triplum quadratum 3468, et quotus 6 ſcribatur pro tertia radicis nota: ducatur hic quotus in diuiſorem, et factum 20808 ſubducatur, reſtabit 369, cui adiecta nota penultima e duabus relictis, habebitur 3693, e quo ſi ſubducatur triplum quadratum termini tertii 6 ductum in primum et ſecundum, nempe 3672, reſiduum erit 21, cui adiecta nota vltima e duabus relictis, habebitur 216, in quo latet cubus termini tertii 216, quo proinde ſub-

lato nihil remanet, id quod indicio eſt numerum 346 eſſe radicem cubicam numeri propoſiti, quem bis in ſe ducta accurate reſtituet.

131. Problema. *Radicem cubicam per approximationem extrahere e numero, qui non ſit cubus.*

Resolut. Fiat primum operatio per regulas ſuperiores, qua peracta, membrisque omnibus iam exhauſtis reſtabit adhuc aliquod reſiduum habens pro denominatore 1: adiectis ad hoc reſiduum tribus zeris denominator erit 1000, cuius radix cubica eſt 10; extrahatur itaque e numeratore radix lege conſueta, ſpectando nimirum tres adiectos zeros tanquam nouum membrum reſiduo adiectum. Peracta operatione reſiduo ſecundo iterum adiiciantur tres zeri, erit iam denominator 1000000, cuius radix cubica eſt 100: extrahatur igitur e numeratore radix more conſueto, denuo tres hos adiectos zeros tanquam nouum membrum reſiduo adiunctum ſpectando. Hac eadem operatione quamdiu libuerit repetita, obtinebuntur notae radicis ab integris virgula ſeparandae, habentes pro denominatoribus 10, 100, 1000 etc. qui in ſcribendo omitti ſolent.

## EXEMPLA.

I. $\sqrt[3]{(5{,}305{,}472)} = 174{,}41$ etc. $= 174 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100}$ etc.

II. $\sqrt[3]{48} = 3{,}63$ etc. $= 3 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100}$ etc.

III. $\sqrt[3]{(474,676,416)} = 780,068$ etc. $= 780 + \frac{0}{10} + \frac{6}{100} + \frac{8}{1000}$ etc.

132. Problema. *Ope formulae ſuperioris (127) extrahere quamuis radicem e dato numero, qui non ſit perfecta potentia.*

Resolut. Potentia perfecta proxime minor ponatur $= P$, reſiduum, quod poſt conſuetam extractionem remanet, per eandem diuiſum $= Q$, $m = 1$, exponens radicis quaeſitae $= n$: obtinebitur ope eius formulae factis his ſubſtitutionibus ſeries numerorum infinita, quae reliquam radicis partem certa quadam progreſſionis lege exhibebit.

## EXEMPLA.

I. $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{256}$ etc.

II. $\sqrt[3]{15} = 2 + \frac{7}{12} - \frac{49}{288} + \frac{1715}{20736}$ etc.

Scholion. In exemplo primo quadratum proxime minus eſt $1 = P$, reſiduum eſt itidem $1$, quod per $P$ diuiſum dat quotum $1 = Q$, $m = 1$, $n = 2$. Quare

$$P^{\frac{m}{n}} = A = 1 \quad - - - - - - = 1$$

$$\frac{m}{n} AQ = B = \frac{1}{2} \quad - - - - - - = \frac{1}{2}$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = C = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 1$$

$$= -\tfrac{1}{8} \;\cdots\; = -\frac{1}{2.4}$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = D = -\tfrac{3}{6} \times -\tfrac{1}{8}$$

$$= \tfrac{3}{48} \;\cdots\; = \frac{1.3}{2.4.6.}$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = E = -\tfrac{5}{8} \times \tfrac{1}{16}$$

$$= -\tfrac{5}{128} = -\frac{15}{384} = -\frac{1.3.5.}{2.4.6.8.}$$

Nempe lex progreſſionis ea eſt, vt fractionum ſigna alternent, et deinceps quaeuis fractio ſequens componatur e praecedente, numeratore eiuſdem ducto in numerum, qui ſequitur in ſerie numerorum imparium 1, 3, 5 etc. denominatore ducto in numerum, qui ſequitur in ſerie parium 2, 4, 6 etc.

In exemplo ſecundo cubus proxime minor eſt $8 = P$, reſiduum eſt 7, quod diuiſum per P dat quotum $\tfrac{7}{8} = Q$, $m = 1$, $n = 3$. Quare

$$P^{\frac{m}{n}} = A = 2$$

$$\frac{m}{n}AQ = B = \tfrac{1}{3} \times 2 \times \tfrac{7}{8} = \tfrac{14}{24}$$

$$= \;\cdots\; \frac{2.7}{3.8}$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = C = -\tfrac{2}{6} \times \tfrac{14}{24} \times \tfrac{7}{8} = -\tfrac{1}{3} \times \tfrac{49}{96}$$

$$= -\tfrac{49}{288} = \;\cdots\; -\frac{2.2.7.7}{6.3.8.8}$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = D = -\tfrac{5}{9} \times -\tfrac{49}{288} \times \tfrac{7}{8}$$

$$= \tfrac{1715}{20736} \text{ etc.} \cdots = \frac{5.2.2\ 7.7.7.}{9.6.3.8.8.8} \text{ etc.}$$

Patet adeo lex continuandi ſeriem: nempe ſigna fractionum alternant, et vt ſequens quiuis terminus obtineatur, debet anterior duci in $\frac{7}{8}$, item in fractionem, cuius tam numerator, quam denominator creſcit iuxta eandem differentiam 3; ſunt nimirum eae fractiones $\frac{2}{6}$; $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{11}{15}$ etc.

---

# CAPVT IV.

## De Calculo quantitatum Radicalium.

133. Nomine quantitatum *radicalium* eas intelligi, quibus ſignum radicale $\sqrt{}$ praefixum eſt, alibi adnotauimus (92). Quanquam autem eae plerumque irrationales ſint, vſum tamen habent frequentiſſimum, capaceſque ſunt variae transformationis, additionis, ſubtractionis etc. Porro *eiuſdem denominationis* eſſe dicuntur, in quibus idem eſt exponens ſigni radicalis; e. g. $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{cd}$: item $\sqrt{2}$ et $\sqrt[3]{5}$: *diuerſae denominationis* autem vocantur, in quibus exponentes illi diuerſi ſunt; e.g. $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[m]{a}$. Quodſi quantitates radicales eiuſdem denominationis poſt radicale ſignum eaſdem inſuper quantitates habeant, vt $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, *communicantes* adpellantur.

134. **Problema.** *Quantitates radicales diuerſae denominationis ad eandem denominationem reducere.*

Resolut. Quantitates quaeuis diuerſae denominationis rite exhibentur his formulis: $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[r]{b^t}$. Iam $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, et $\sqrt[r]{b^t} = b^{\frac{t}{r}}$ (102): non ergo alia re opus eſt, quam vt exponentes fracti reducantur ad eundem denominatorem (75); erit enim $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mr}{nr}}$, et $b^{\frac{t}{r}} = b^{\frac{nt}{nr}}$: hinc $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{mr}{nr}} = \sqrt[nr]{a^{mr}}$; et $\sqrt[r]{b^t} = b^{\frac{nt}{nr}} = \sqrt[nr]{b^{nt}}$. Vnde exſiſtit haec regula: exponens cuiusuis ſigni, et quantitatis radicalis ducatur in omnium reliquorum ſignorum exponentes.

## EXEMPLA.

$$\text{I.} \quad \begin{cases} \sqrt[2]{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8} \\ \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \end{cases}$$

$$\text{II.} \quad \begin{cases} \sqrt[2]{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{12}{24}} = 3^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729} \\ \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{6}{24}} = 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125} \\ \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{8}{24}} = 7^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401} \end{cases}$$

135. Coroll. 1. Locus eſt interdum compendio, vti adparet in exemplo ſecundo. Si enim habeatur minimus quidam numerus, quem ſignorum exponentes absque vllo reſiduo metiantur, hic ponatur pro communi ſignorum exponente; quantitas autem quaeuis radicalis eleuetur ad eam potentiam, quam indicat quotus enaſcens e diuiſione eius numeri per exponentem ſui ſigni. E.g. in ſecundo exemplo per omnium ſignorum exponentes diuidi poteſt numerus 12, ergo hic erit communis ſignorum exponens; deinde cum 12 diuiſum per 2 det pro quoto 6, eleuetur 3 ad ſextam potentiam, eritque $\sqrt[2]{3}=\sqrt[12]{729}$. Item quia 12 diuiſum per 4 dat pro quoto 3, eleuetur 5 ad tertiam potentiam, eritque $\sqrt[4]{5} =\sqrt[12]{125}$. Denique quia $\frac{12}{3}=4$, eleuetur 7 ad quartam potentiam, eritque $\sqrt[3]{7}=\sqrt[12]{2401}$

136. Coroll. 2. Reductio haec patefacit, vtra maior ſit e propoſitis duabus quantitatibus radicalibus. E. g. ſi dubitetur, an quantitas $\sqrt[4]{5}$ maior ſit, quam $\sqrt[6]{11}$, erit prior reducta $=\sqrt[12]{125}$, poſterior $=\sqrt[12]{121}$: vbi iam adparet priorem maiorem eſſe poſteriore.

137. Problema. *Quantitates radicales reducere ad minores terminos, ſeu ad ſimpliciorem expreſſionem.*

Resolut. Quantitas radicalis reſoluatur in ſuos factores, quorum ſi vnus fuerit potentia eiuſdem gradus, quem ſigni radicalis exponens indicat,

ex-

extrahatur ex illo radix, et ponatur ante ſignum pro coefficiente, ceteris factoribus poſt ſignum radicale relictis.

DEMONSTR. Omnis enim quantitas ad ſimpliciorem expreſſionem reducibilis repraeſentari poteſt hac formula $d\sqrt[n]{a^m b^n}$; atqui $d\sqrt[n]{a^m b^n} = d.a^{\frac{m}{n}}.b^{\frac{n}{n}}$ (102) $= d.b.a^{\frac{m}{n}} = db\sqrt[n]{a^m}$: ergo e factore $b^n$ extrahenda eſt radix $n$, et ipſa ante ſignum pro coefficiente ponenda.

## EXEMPLA.

I. $\sqrt[3]{a^3b^2} = a^{\frac{3}{3}}.b^{\frac{2}{3}} = a\sqrt[3]{b^2}$

II. $\sqrt{12} = \sqrt{4.3} = 2\sqrt{3}$.

III. $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16.3} = 2\sqrt[4]{3}$.

IV. $\sqrt{(a^2c - a^2b)} = a\sqrt{(c - b)}$

V. $\sqrt[m+1]{b^m c d^{m+1}} = b^{\frac{m}{m+1}}.c^{\frac{1}{m+1}}.d^{\frac{m+1}{m+1}} = d\sqrt[m+1]{b^m c}$.

138. COROLL. I. Viciſſim ergo coefficientes ante ſignum radicale poſiti, manente valore quantitatis radicalis, reiici poſſunt poſt ſignum, modo eleuentur ad eam potentiam, quam indicat exponens ſigni radicalis. Sic in ſuperioribus exemplis $a\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{a^3b^2}$; $2\sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{4.3} = \sqrt[2]{12}$; $2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{16.3} = \sqrt[4]{48}$.

139. COROLL. 2. Siqua radicalis quantitas nullum habeat factorem, qui ſit potentia perfecta eiusdem gradus, quem exponens ſigni radicalis indicat, ea nequit reduci ad ſimpliciorem expreſſionem, vti ſunt $\sqrt{15}$, $\sqrt[3]{ab^2}$, $\sqrt[n]{a^m b^r}$.

140. COROLL. 3. Reductione hac interdum efficitur, vt quantitates radicales euadant communicantes. E. g. radicales hae $\sqrt{8}$ et $\sqrt{18}$ non ſunt communicantes (133): at reductae $2\sqrt{2}$ et $3\sqrt{2}$ factae ſunt communicantes. Similiter ſi $\sqrt[3]{a^3b}$ et $\sqrt[3]{c^3b}$ reducantur ad has $a\sqrt[3]{b}$ et $c\sqrt[3]{b}$, redduntur communicantes.

SCHOLION. In quantitatibus radicalibus algebraicis factores facile innoteſcunt; in numericis non item. Quare vt deprehendi poſſit, an numerus radicalis habeat aliquem factorem, qui ſit accurate ea potentia, quam exponens ſigni radicalis indicat, reſolui debet in ſuos diuiſores, in quibus ſi compareat quaeſita potentia, e. g. quarta, neceſſe eſt etiam comparere omnes inferiores nempe tertiam, ſecundam, primam. Sic ſi quaeratur, an quantitas $\sqrt[4]{368}$ habeat aliquem factorem quarti gradus, reſoluatur ope diuiſionis in ſuos factores tentando diuiſionem per minores numeros, et cuiuis diuiſori quotum adſcribendo hoc pacto:

2, 184
4, 92
8, 46
16, 23

comparet inter hos factores numeri 2 potentia prima 2, ſecunda 4, tertia 8, et quarta 16; quare 16 eſt quaeſita potentia, ac proinde $\sqrt[4]{368}$ $= \sqrt[4]{16.\ 23.} = 2\sqrt[4]{23}.$

141. PROBLEMA. *Datas quantitates radicales inter ſe addere, vel a ſe ſubtrahere.*

RESOLUT. 1) Si datae quantitates diuerſae fuerint denominationis, ante omnia ad eandem reducantur (134), tum ſi deprehendantur eſſe communicantes, addantur, vel ſubtrahantur coefficientes ante ſignum radicale poſiti, adiecta ſummae, vel differentiae communi quantitate radicali. 2) Si vero non fuerint communicantes, addantur, vel ſubtrahantur more quantitatum heterogenearum (29). 3) Quodſi quantitates radicales afficiantur pluribus ſignis radicalibus radices radicum exprimentibus, eaedem obtinent leges, modo eae habeantur pro communicantibus, in quibus quantitates poſt totidem ſigna radicalia poſitae eaedem ſunt, e. g. $3\sqrt{(2\sqrt{5})}$ et $7\sqrt{(2\sqrt{5})}$. Conf. exempl. 4.

## EXEMPLA.

$$\text{I.}\ \left.\begin{array}{l}\sqrt{50} = \sqrt{25.\,2} = 5\sqrt{2} \\ \sqrt{18} = \sqrt{9.\ 2} = 3\sqrt{2}\end{array}\right\}\ \textit{Addend.}$$

$$\overline{8\sqrt{2}}\quad \textit{Summa.}$$

II. $\sqrt[3]{8a^3b} - \sqrt{a^2b} = 2a\sqrt[3]{b} - a\sqrt{b}$ } *Addend.*
$\sqrt[3]{27a^3b} - \sqrt{4a^2b} = 3a\sqrt[3]{b} - 2a\sqrt{b}$ }

$5a\sqrt[3]{b} - 3a\sqrt{b}$ *Summa.*

III. $\sqrt{20} = \sqrt{4.5} = 2\sqrt{5} = 2\sqrt[6]{125}$ } *Addend.*
$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8.3} = 2\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[6]{9}$ }

$2\sqrt[6]{125} + 2\sqrt[6]{9}$ *Summa.*

IV. $\sqrt{(8\sqrt{3})} = 2\sqrt{(2\sqrt{3})}$ } *Addend.*
$\sqrt{(9\sqrt{12})} = 3\sqrt{(2\sqrt{3})}$ }

$5\sqrt{(2\sqrt{3})}$ *Summa.*

I. $\sqrt{32} = \sqrt{4.8} = 2\sqrt{8}$ *Minuend.*
$\sqrt{8} = \sqrt{1.8} = 1\sqrt{8}$ *Subtr.*

$\sqrt{8}$ *Differ.*

II. $6\sqrt{a^2b} - \sqrt{9b^2c} = 6a\sqrt{b} - 3b\sqrt{c}$ *Minuend.*
$2\sqrt{a^2b} + 2\sqrt{b^2c} = 2a\sqrt{b} + 2b\sqrt{c}$ *Subtr.*

$4a\sqrt{b} - 5b\sqrt{c}$ *Differ.*

III. $\frac{am}{bc}\sqrt{(d^2 - 4md^3)} = \frac{am}{bc}d\sqrt{(1 - 4md)}$ *Minuend.*

$\frac{c}{a}\sqrt{(d^2 - 4md^3)} = \frac{c}{a}d\sqrt{(1 - 4md)}$ *Subtr.*

$\left(\frac{a^2m - bc^2}{abc}\right)d\sqrt{(1 - 4md)}$ *Differ.*

IV. $2\sqrt{(16\sqrt{18})} = 2\sqrt{(16\sqrt{9.2})} = 8\sqrt{(3\sqrt{2})}$ *M.*
$\sqrt{(12\sqrt{2})} = \sqrt{(4.3\sqrt{2})} = 2\sqrt{(3\sqrt{2})}$ *S.*

$6\sqrt{(3\sqrt{2})}$ *D.*

142. COROLL. Si quantitates radicales habeant ſibi adiunctas alias nullo ſigno radicali affectas, eae addantur, vel ſubtrahantur iuxta conſuetas regulas. E. g. $\left.\begin{matrix} a+2\sqrt{ac}+3\sqrt{bd} \\ 2a-\sqrt{ac}+4\sqrt{bd} \end{matrix}\right\}=3a+\sqrt{ac}+7\sqrt{bd}.$

143. PROBLEMA. *Quantitates radicales inter ſe multiplicare.*

RESOLUT. Si quantitates radicales diuerſae fuerint denominationis, ante omnia reducantur ad eandem (134): tum coefficientes multiplicentur inter ſe, et quantitates radicales itidem inter ſe communi ſigno radicali retento. Si quantitates afficiantur pluribus ſignis radicalibus, eae radicales debent in ſe ipſas duci, quae totidem ſigna radicalia ante ſe habent. Conſ. exempl. 3, et 4.

DEMONSTR. Quaeuis quantitates radicales eiusdem denominationis repraeſentari poſſunt per has formulas $c\sqrt[n]{a^m}$ et $d\sqrt[n]{b^r}$; atqui $c\sqrt[n]{a^m}\times d\sqrt[n]{b^r}$ $=c.a^{\frac{m}{n}}\times d.b^{\frac{r}{n}}=cd.a^{\frac{m}{n}}.b^{\frac{r}{n}}=cd\sqrt[n]{a^m b^r}.$

## EXEMPLA.

I. $\sqrt{ab}\times\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[6]{a^3b^3}\times\sqrt[6]{a^4b^2}=\sqrt[6]{a^7b^5}.$

II. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\sqrt{9}+\sqrt{6}-\sqrt{6}$ $-\sqrt{4}=3-2=1.$

III. $\sqrt{(3+\sqrt{2})}\times\sqrt{(5\sqrt{5})}=\sqrt{(15\sqrt{5})}$ $+\sqrt{(5\sqrt{10})}=\sqrt{\sqrt{1125}}+\sqrt{\sqrt{250}}.$

IV. $(\sqrt{\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{2}})\times\sqrt{5\sqrt{5}}=\sqrt{5\sqrt{25}}$ $+\sqrt{5\sqrt{10}}=\sqrt{5\cdot5}+\sqrt{5\sqrt{10}}=5$ $+\sqrt{5\sqrt{10}}.$

144. Coroll. Si quantitas radicalis eleuanda ſit ad eam potentiam, quam exponens ſigni radicalis indicat, omiſſo radicali ſigno ſcribitur ipſa quantitas absque vlla mutatione. Si enim quantitas radicalis $\sqrt[n]{a^m}$ eleuanda ſit ad potentiam $n$, erit ea $= \sqrt[n]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$.

145. Problema. *Datam quantitatem radicalem per aliam radicalem diuidere.*

Resolut. 1) Si datae quantitates diuerſae fuerint denominationis, ante omnia reducantur ad eandem (134); diuidantur deinde coefficientes, et radicales diuidendi per coefficientes, ac radicales diuiſoris. 2) Si quantitates pluribus afficiantur ſignis radicalibus, eae debent per ſeſe diuidi, quae poſt totidem ſigna radicalia poſitae ſunt, vt in exempl. 6. 3) Si diuiſio peragi nequeat, notetur quotus inſtar fractionis. 4) Si diuiſor, aut diuidendus non ſit ſigno radicali affectus, eleuetur ad eam potentiam, quam indicat exponens ſigni radicalis, quo alter affectus eſt, ac praefixo eodem radicali ſigno tractetur inſtar quantitatis radicalis. Conf. exempl. 6.

Demonstr. Omnis enim huiusmodi diuiſio repraeſentari poteſt hac formula: $c\sqrt[n]{a^m} : d\sqrt[n]{b^r}$; atqui in hac quotus eſt $\frac{ca^{\frac{m}{n}}}{db^{\frac{r}{n}}} = \frac{c}{d}\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^r}}$,

# EXEMPLA.

I. $6\sqrt{ab} : 2\sqrt{a} = 3\sqrt{b}$.

II. $(ab\sqrt{cd} - b^2\sqrt{ed}) : b\sqrt{d} = a\sqrt{c} - b\sqrt{e}$.

III. $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{5}} : \frac{5}{9}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{27}{20}\sqrt{\frac{6}{10}} = \frac{27}{20}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

IV. $(8\sqrt[3]{20} + 12\sqrt[3]{10}) : 4\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2}$.

V. $(\sqrt{15} + \sqrt{21} - \sqrt{27}) : \sqrt{3} = \sqrt{5} + \sqrt{7} - 3$.

VI. $(\sqrt{8\sqrt{5}} - 3\sqrt{12\sqrt{2}}) : 2 = \sqrt{2\sqrt{5}} - 3\sqrt{3\sqrt{2}}$.

VII. $(\sqrt{ac} - \sqrt{bc} - \sqrt{ad} + \sqrt{bd}) : (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{c} - \sqrt{d}$.

SCHOLION. Si quantitates poſt ſigna radicalia fuerint negatiuae, calculus earum iisdem plane regulis continetur. At de ſignis, quae facto in earundem multiplicatione, vel quoto in diuiſione praefigenda ſunt, autores non conueniunt. Mihi videtur radix ex eiusmodi multiplicatione, aut diuiſione oriunda ſemper eſſe impoſſibilis, adeoque negatiuo ſigno afficienda. Certe in aperto eſt quadratum quantitatis $\sqrt{-a}$ eſſe $-a$, ac proinde $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$; niſi quis exiſtimet cum Boſcouichio aliud eſſe multiplicare eiusmodi quantitatem per ſeipſam, aliud euehere ad ſecundam potentiam, quae duo idem plane ſonant in realibus quantitatibus.

146. PROBLEMA. *Datam quantitatem radicalem euehere ad quamcunque potentiam datam.*

RESOLUT. Coefficiens, ſiquis eſt, quantitatis datae reiiciatur poſt ſignum radicale (138): deinde exponens ſigni radicalis diuidatur per exponentem potentiae datae.

DEMONSTR. Quaeuis quantitas radicalis repraeſentari poteſt hac formula: $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$, et quiuis exponens potentiae, ad quam eleuari debet, poni poteſt $=\frac{n}{r}$: atqui $\left(\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}\right)^{\frac{n}{r}}=\sqrt[\frac{mr}{n}]{\frac{a^m c}{b^m d}}$; nam

$$\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}=\sqrt[m]{\frac{a^m c}{b^m d}}\,(138)=\frac{a^{\frac{m}{m}}c^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{m}{m}}d^{\frac{1}{m}}}\,(102)\text{: atqui hoc}$$

eleuatum ad potentiam $\frac{n}{r}$ eſt $=\frac{a^{\frac{mn}{mr}}c^{\frac{n}{mr}}}{b^{\frac{mn}{mr}}d^{\frac{n}{mr}}}$ (99)

$$=\frac{a^{m:\frac{mr}{n}}c^{1:\frac{mr}{n}}}{b^{m:\frac{mr}{n}}d^{1:\frac{mr}{n}}}\,(86)=\sqrt[\frac{mr}{n}]{\frac{a^m c}{b^m d}}\,(120).$$

147. PROBLEMA. *E data quantitate radicali quamuis radicem extrahere.*

RESOLUT. Coefficiens datae quantitatis, ſiquis eſt, reiiciatur poſt ſignum radicale (138): deinde exponens ſigni radicalis multiplicetur per exponentem radicis, quae extrahenda eſt.

DEMONSTR. Quaeuis quantitas radicalis repraeſentari poteſt hac formula: $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$, et exponens cuiuſuis radicis quaeſitae poteſt poni $=\frac{n}{r}$; atqui $\sqrt[\frac{n}{r}]{\left(\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}\right)} = \sqrt[\frac{mn}{r}]{\frac{a^m c}{b^m d}}$; nam $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \sqrt[m]{\frac{a^m c}{b^m d}}$ (138) $= \frac{a^{\frac{m}{m}} c^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{m}{m}} d^{\frac{1}{m}}}$ (102); atqui huius radix $\frac{n}{r}$ eſt $\frac{a^{\frac{mr}{mn}} c^{\frac{r}{mn}}}{b^{\frac{mr}{mn}} d^{\frac{r}{mn}}}$ (124) $= \frac{a^{m:\frac{mn}{r}} c^{1:\frac{mn}{r}}}{b^{m:\frac{mn}{r}} d^{1:\frac{mn}{r}}} = \sqrt[\frac{mn}{r}]{\frac{a^m c}{b^m d}}$ (102).

# SECTIO III.

## DE PROBLEMATIS, ET AEQUATIONIBUS.

## CAPVT I.

### *De natura Problematum, et Aequationum.*

148. *Problema* hoc loco eſt propoſitio, qua petitur, vt e datis quibuſdam quantitatibus valor vnius, aut plurium incognitarum eruatur; vt ſi proponatur quaerendus numerus, qui ſibi additus, et in ſe ductus det ſummam aequalem facto. Methodus reſoluendi problemata adhibito calculo, et ſignis algebraicis *Analyſis* dicitur.

149. COROLL. Cum ergo valor incognitarum e datis eruendus ſit, inter quantitates datas, et quaeſitas neceſſe eſt nexum quemdam, et relationes intercedere, quae *conditiones problematis* vocantur. In exemplo ſuperiore numero quaeſito haec adnectitur conditio, vt eius ſibi additi ſumma, et in ſe ducti factum aequalia ſint.

150. In quauis autem problematis conditione inuoluitur aequalitas quaedam duarum quantitatum, quae *aequatio* adpellatur, vt ſi proponatur problema de inueniendo numero, qui vna cum ſuo dimidio efficiat 6, euidens eſt in eius conditione inuolui aequationem, ſeu aequalitatem, quam numerus ille auctus ſuo dimidio habet cum numero 6. Quodſi non aequalitas, ſed proportio tantum inuoluatur in aliqua problematis conditione, facile eruetur e proportione aequatio, vt infra docebimus (202).

151. COROLL. 1. Quoduis ergo problema reſolui poteſt in aequationem vnam, aut plures, ſi nempe ſingulae eius conditiones ſingulis aequationibus exprimantur. E. g. problema de inueniendis duobus numeris, quorum ſumma ſit 30, differentia 10, duas habet conditiones, quarum prima reſoluitur in aequationem ſummae cum numero 30, ſecunda in aequationem differentiae cum numero 10.

152. COROLL. 2. Quaelibet aequatio duobus conſtat membris ſigno $=$ coniunctis: nimirum termini a ſiniſtris ante ſignum aequalitatis poſiti primum membrum, ceteri a dextris ſecundum conſtituunt. E. g. in hac aequatione $a^2 - x^2 = b^2 - ad$, termini $a^2 - x^2$ primum aequationis membrum, reliqui $b^2 - ad$ ſecundum efficiunt.

153. COROLL. 3. Poteſt vnum aequationis membrum etiam eſſe $= 0$, ſi nempe in altero membro quantitates poſitiuae, et negatiuae ſeſe deſtruant: e. g. $3a - 2a + 5 - a - 5 = 0$.

154. Problemata dicuntur *determinata*, quae vel vnicam tantum ſolutionem, vel determina-

tum aliquem habent ſolutionum numerum; ſeu in quibus vel vnicus tantum eſt valor incognitae quantitatis quaeſtioni ſatisfaciens, vel certe determinatus valorum numerus. *Indeterminata* vocantur, quae innumeras admittunt ſolutiones, ſeu vbi infiniti ſunt valores, qui pro quantitatibus incognitis ſubſtituti quaeſtioni ſatisfaciunt. E. g. ſi quaerantur duo numeri, quorum differentia ſit $= 3$, problema erit indeterminatum, cum eiuſmodi numeri infiniti eſſe poſſint: nam $9 - 6 = 3$, $6 - 3 = 3$; $7 - 4 = 3$; $15 - 12 = 3$ etc. At ſi addatur eorundem numerorum ſummam oportere eſſe $= 15$, iam adiecta haec altera conditio problema determinat, nec iam ſatisfaciunt quaeſtioni vlli alii numeri, quam 6 et 9.

155. Coroll. 1. Si omnibus problematis conditionibus per totidem aequationes expreſſis tot aequationes deprehendantur, quot ſunt quantitates incognitae a ſe independentes, ſeu quarum vna inuenta non hoc ipſo innoteſcit altera, poterit ſemper deueniri ad finalem quamdam aequationem, quae vnicam continet incognitam, quemadmodum patebit in ſequentibus, idque erit certum indicium problema eſſe determinatum. Sin autem pauciores ſint aequationes, quam incognitae a ſe independentes, non poterit elici finalis aequatio vnicam continens incognitam, eritque argumento problema eſſe indeterminatum, poſſeque vnam, vel plures incognitas aſſumi ad arbitrium, ſicut adparebit in ſequentibus.

156. Coroll. 2. Si aequationes plures fuerint, quam incognitae a ſe mutuo non dependentes, problema eſt *plus quam determinatum*, et niſi caſu fortuito accidat, vt determinatis incognitarum valoribus reliquae etiam redundantes aequationes verificentur, problema inuoluet repugnantiam. Sic ſi in exemplo ſuperiore (154) addas tertiam conditionem, vt maior ex numeris quaeſitis ſit aequalis quadrato differentiae eorundem, haec quidem conditio in repertis numeris 6 et 9 caſu verificabitur: at ſi hanc adderes, vt ambo numeri ſint pares, problema repugnantiam inuolueret, cum repugnet, vt duo numeri pares efficiant ſummam imparem.

157. Aequatio, ad quam problema vltimo reducitur, vel *ſimplex* erit, ſi nempe occurrat vnica tantum potentia quantitatis incognitae, vt in his $x = a$; $x^3 = a^2 b$: vel *affecta*, ſi nimirum plures eiuſdem quantitatis incognitae occurrant potentiae, vt in his $x^2 - ax = b^2$; $x^3 + ax^2 = b^2 c$. Quaeuis item aequatio eſt primi, ſecundi, tertii etc. gradus, prout quantitas incognita aſſurgit ad primam, ſecundam, tertiam etc. potentiam.

Scholion. Nos, qui ſolis tironibus ſcribimus, ea ſolum pertractabimus, quae ad aequationes primi, et ſecundi gradus pertinent. Quare praetermittimus ea omnia, quae in gratiam altiorum aequationum tradi hoc loco ſolent. Siqui tironum vlteriores in algebra progreſſus facere voluerint, iis, quae trademus, probe intellectis cetera facile e peruagatis mathematicorum libris condiſcent.

158 THEOREMA. *Quiuis aequationis terminus ex vno membro in aliud transponi poteſt cum ſigno contrario retenta membrorum aequalitate.*

DEMONSTR. Terminus enim, qui cum ſigno contrario transponitur, vel eſt poſitiuus, vel negatiuus: ſi eſt poſitiuus, ea transpoſitione idem vtrinque tollitur; ſi eſt negatiuus, ea transpoſitione idem vtrinque additur; atqui ſi ab aequalibus tollatur, vel addatur idem, retinetur aequalitas: ergo.

E. g. Si in aequatione $a + b = c$ terminus $b$ cum ſigno $-$ transponitur, vt ſit $a = c - b$, terminus $b$ reapſe vtrinque tollitur. Et ſi in aequatione $a^2 - x^2 = b^2$ terminus $- x^2$ cum ſigno $+$ transponitur, vt ſit $a^2 = b^2 + x^2$, terminus $x^2$ reapſe vtrinque additur.

159. COROLL. 1. Quiuis ergo aequationis terminus poteſt transpoſitione e negatiuo poſitiuus, e poſitiuo negatiuus reddi retenta membrorum aequalitate. Poteſt item quaelibet aequatio redigi in nihilum, ſi ex vno membro omnes termini transponantur ad aliud cum ſignis contrariis, id quod in aequationibus praeſertim altioribus facere non raro expedit. E. g. ſi fuerit $a^2 + x^2 = b^2$ erit $a^2 + x^2 - b^2 = 0$.

160. COROLL. 2. Quiuis terminus in vtroque aequationis membro iiſdem ſignis affectus retenta aequalitate vtrinque deleri poteſt. E. g. ſi fuerit $3a^2 - 2bc + x^2 = b^2 + c^2 - 2bc$, erit $- 2bc$ vtrinque delendo $3a^2 + x^2 = b^2 + c^2$: nam delere vtrinque quantitatem negatiuam idem eſt, ac eam cum ſigno $+$ vtrobique addere; et

delere poſitiuuam idem eſt, ac eam vtrobique tollere.

161. THEOREMA. *Siquis terminus aequationis per aliquam quantitatem eſt multiplicatus, poſſunt omnes alii vtrinque per eandem retenta aequalitate diuidi, et illa in termino illo deleri: aut ſi eſt diuiſus, poſſunt reliqui multiplicari, et ea ibi rurſus deleri.*

DEMONSTR. Aequalitas enim retinetur, ſi vtrumque aequationis membrum per eandem quantitatem diuidatur, aut multiplicetur; atqui per eandem quantitatem diuidendo in primo caſu, vel multiplicando in ſecundo, terminus ille erit per idem multiplicatus ſimul et diuiſus: quare deleto diuiſore, ac multiplicatore manet inuariatus; ceteri vero, qui per eam quantitatem non multiplicabantur, nec diuidebantur, iam diuidentur in primo caſu, multiplicabuntur in ſecundo: ergo retinebitur membrorum aequalitas.

E. g. ſi fuerit $a^2x - b^2x = ac + cd$, diuidendo vtrumque aequationis membrum per $a^2 - b^2$ erit $x = \frac{ac + cd}{a^2 - b^2}$; rurſus diuidendo per $c$ erit $\frac{x}{c} = \frac{a + d}{a^2 - b^2}$. Similiter ſi fuerit $\frac{a - b}{2c} = 2b^2 - d^2$, cum primum membrum diuiſum ſit per $2c$, hoc in primo membro omittendo, et alterum per illud multiplicando erit $a - b = 4b^2c - 2d^2c$.

162. COROLL. 1. Si ergo omnes aequationis termini per eandem, vel eaſdem quantitates fuerint multiplicati, aut diuiſi, poſſunt eae vtrinque omitti retenta aequalitate. E. g. ſi fuerit $a^2b - ab = ac$, erit omittendo $a$ vtrinque $ab - b = c$. Item ſi fuerit $\frac{a^2 - b^2}{2c} = \frac{d^2}{2c}$, erit omittendo $2c$ vtrinque $a^2 - b^2 = d^2$

163. COROLL. 2. Patet hinc methodus liberandi aequationem a fractionibus. Si enim omnes vtrinque termini reducantur ad eundem denominatorem, poterit vtrinque omitti denominator. E. g. ſi fuerit $\frac{2}{5}ax - \frac{3}{4}x^2 = ab$, erit reducendo omnes terminos ad communem denominatorem $\frac{8ax - 15x^2}{20} = \frac{20ab}{20}$, ſeu $8ax - 15x^2 = 20ab$. Poſſunt etiam fractiones altera poſt alteram tolli, ſi nempe vtrumque membrum aequationis per ſingularum fractionum denominatores ſucceſſiue multiplicetur. E. g. in praecedente aequatione terminos omnes primum multiplicando per 5 erit $2ax - \frac{15}{4}x^2 = 5ab$; rurſus multiplicando per 4 erit $8ax - 15x^2 = 20ab$, vt ante.

164. THEOREMA. *Poteſt vtrumque aequationis membrum retenta aequalitate ad eandem potentiam euehi, vel ex vtroque membro eadem radix extrahi.*

DEMONSTR. Quantitatum enim aequalium tam potentiae, quam radices eiuſdem gradus aequales ſunt; cum illae oriantur aequalium per aequalia multi-

multiplicatione (93), hae aequalium per aequalia diuiſione (122).

E. g. ſi fuerit $a\sqrt[m]{x} = b\sqrt[n]{y}$, erit eleuando ad potentiam *m* vtrumque membrum $a^m x = b^m \sqrt[n]{y^m}$; rurſus vtrumque eleuando ad potentiam *n* erit $a^{mn}x^n = b^{mn}y^m$. Similiter ſi fuerit $x^3 = ab^3$, erit vtrinque extrahendo radicem cubicam $x = \sqrt[3]{ab^3} = b\sqrt[3]{a}$.

Scholion. Ope horum theorematum facile ſoluuntur omnia problemata, quae ad aequationes ſimplices reducuntur, vti elucebit e ſequenti capite.

# CAPVT II.

## *De reſolutione problematum, quae ad aequationes ſimplices reducuntur.*

165. Problema. *Aequationem ſimplicem, in qua vnica eſt incognita, reducere; ſeu efficere, vt in vno membro aequationis ſola incognita, in altero merae quantitates cognitae ſint.*

Resolut. 1) Si in membris aequationis occurrant fractiones, eae ante omnia tollantur (163): et ſi termini omnes per aliquam quantitatem multiplicati ſunt, ea vbique deleatur (162).

E g, $2a - \frac{ac}{d} : = ab^2$; idem eſt ac $2ad - ac = ab^2 d$, ſeu $2d - c = b^2 d$.

2) Si in vtroque membro aequationis occurrant termini quantitatem incognitam continentes, transferantur ſignis mutatis in eam partem, in qua facta finali reductione quantitas incognita euadat poſitiua (159). E. g. ſit $5ax^2 - ab^2 = cd - 2ax^2$: transponendo $-2ax^2$ erit $7ax^2 - ab^2 = cd$: quodſi $5ax^2$ transponeretur, quantitas incognita $x^2$ euaderet in fine negatiua.

3) Si terminis incognitam continentibus adhaereant quantitates cognitae ſignis $+$ aut $-$ iunctae, transferantur omnes ad membrum alterum (159). E. g. ſi fuerit $ax - bx + c^2 - 2d^2 = 3ab^2$, erit transponendo cognitas $c^2$ et $-2d^2$ ad aliud membrum, $ax - bx = 3ab^2 - c^2 + 2d^2$.

4) Si quantitas incognita fuerit per cognitas multiplicata, per eas vtrinque omnes termini diuidantur. E. g. in exemplo ſuperiore $x$ eſt multiplicatum per $a-b$; ergo per $a-b$ omnes terminos diuidendo erit $x = \frac{3ab^2 - c^2 + 2d^2}{a - b}$.

5) Si quantitas incognita a cognitis iam plene ſeparata ad aliquam potentiam, e. g, ſecundam, tertiam etc. eleuata fuerit, ex vtroque membro aequationis extrahatur radix eiuſdem gradus, quem indicat exponens potentiae. E. g. Si fuerit $x^m = a^2 - b^2$, erit $x = \sqrt[m]{(a^2 - b^2)}$. Sin autem quantitas incognita ſigno radicali affecta fuerit, eleuetur vtrumque membrum ad eam po-

tentiam, quam indicat exponens radicis (164).

E. g. Si fuerit $\sqrt[m]{x} = ab$, erit $x = a^m b^m$.

Scholion. Si in quapiam aequatione plures adfuerint radicales, reductio commodius inſtituetur hunc in modum. Sit e. g. reducenda haec aequatio $\sqrt{ax} = \sqrt{bx} + d$. Ponatur $\sqrt{ax} = p$, $\sqrt{bx} = q$, erit $ax = p^2$, $bx = q^2$. Iam facta pro radicalibus ſubſtitutione erit $p = q + d$, et membrum vtrumque eleuando ad quadratum erit $p^2 = q^2 + 2qd + d^2$, ac loco $p^2$, et $q^2$ ponendo valores ſuperiores erit $ax = bx + 2qd + d^2$: quia vero terminus $2qd = 2d\sqrt{bx}$ etiamnum radicalis eſt, rurſus eleuetur vtrumque membrum ad quadratum ante $bx$ et $d^2$ in alterum membrum traiiciendo, eritque $a^2x^2 - 2abx^2 + b^2x^2 - 2ad^2x + 2bd^2x + d^4 = 4q^2d^2$, vbi ſi pro $q^2$ ſubſtituatur eius valor $bx$, obtinebitur aequatio ab omni radicali libera. Atque hoc pacto quantitates radicales eliminare ſemper licebit.

166. Problema. *Datum problema ad ſuas aequationes reducere.*

Resolut. Statu quaeſtionis, et incluſis in ea conditionibus diligenter expenſis, ſedulo diſpiciendum eſt, quaenam dentur quantitates, quaenam quaerantur, quaenam item inter quaeſitas ſit illa, a cuius inuentione pendet ſolutio problematis: quaenam denique inter datas, et quaeſitas intercedant relationes.

2) Quantitates datae primis alphabeti literis, quaeſitae poſtremis deſignentur. Si quae propter mutuam relationem eadem litera deſignari poſſint, eadem deſignentur iuxta eam, quam habent

relationem, vt ſi maior ſit minoris tripla, et minor adpelletur $x$, maior exprimenda eſt per $3x$, non per nouam literam.

3) Videndum accurate, quaenam quantitates iuxta problematis conditiones vel ſimul, vel ſeorſim dicantur eſſe aequales, vel proportionales: earum aequalitates per aequationes exprimantur, quae quidem ſemper tot erunt, quot problema habet conditiones (151): proportio vero, ſiqua occurrit, reſoluatur in aequationem, vti dicemus (202).

## EXEMPLA.

I. Sit propoſitum ſequens problema. *Tres luſores lucrati ſunt aureos 160; ſecundus octonis plures accepit quam primus; lucrum tertii aequat amborum lucra: quaeritur ſingulorum lucrum.* 1) Patet dari ſummam lucrorum, nempe 160 aureos, dari item numerum 8; quaeri autem ſingulorum lucrum: patet autem inuento primi lucro ceterorum lucra innoteſcere; nam lucrum ſecundi tantundem eſt plus aureis 8, lucrum tertii e lucro vtriusque coaleſcit. Igitur 2) ſit ſumma $160 = a$, $8 = b$, lucrum primi $= x$, erit iuxta problematis conditionem lucrum ſecundi $= x + b$; lucrum tertii $= 2x + b$. 3) Cum lucra omnium trium ſimul efficere debeant 160 $= a$, collectis omnium luris naſcetur haec aequatio $x + x + b + 2xc + b = a$, ſeu $4x + 2b = a$.

II. Sit propoſitum ſequens problema. *Inuenire tres numeros quorum primus cum ſecundo faciat* 8, *ſecundus cum tertio* 13, *tertius cum primo* 11. 1) Patet hic dari tres numeros 8, 13, et 11, ac quaeri tres alios. 2) Itaque ſit $8 = a$, $13 = b$; $11 = c$; et quia tres numeri quaeſiti a ſe non pendent ita, vt vnus ex alio innoteſcat, ſinguli ſingulis literis deſignandi ſunt: ſit ergo primus $= x$, ſecundus $= y$, tertius $= z$. 3) Ex prima problematis conditione naſcitur haec aeqatio $x + y = a$; ex ſecunda haec $y + z = b$; ex tertia haec $x + z = c$.

III. Sit propoſitum ſequens problema. *Inuenire duos numeros, e quorum primo ſi ad ſecundum transferatur* 1, *ambo aequales fiant: ſin autem e ſecundo ad primum transferatur* 1, *primus fiat ſecundi duplus.* 1) Perſpicuum eſt quaeri duos numeros a ſe independentes, et dari duas earundem relationes, vnam ſcilicet aequalitatis, alteram, vt ſic loquar, duplicitatis. Quare 2) prior vocetur $x$, poſterior $y$. 3) Iam e prima conditione ſi ex $x$ ad $y$ accedat 1, erit $x - 1 = y + 1$; et ex ſecunda ſi ad $x$ ex $y$ accedat 1, erit $x + 1$ duplum de $y - 1$; vt ergo hoc illi aequale fiat, debet hoc per 2 multiplicari, eritque $x + 1 = 2y - 2$. Atque ita inuentae ſunt duae aequationes e totidem conditionibus problematis erutae.

167. PROBLEMA. *Aequationes intermedias, in quas problema reſolutum eſt, reducere ad vnicam finalem, in qua vna tantum contineatur quantitas incognita.*

Resolut. Poſtquam problema in ſuas aequationes rite reſolutum eſt, hae inter ſeſe ita comparandae ſunt, vt quantitates incognitae ſenſim eliminentur, vnica in aequatione finali remanente. Et ſiquidem problema determinatum fuerit, ea incognitarum eliminatio ſemper obtineri poterit his modis:

1) Subſtitutione, ſi nempe valor cuiusdam incognitae ex vna aequatione erutus in altera ſubſtituatur. E. gr. ſint duae aequationes, in quas problema poſtremum e ſuperioribus reſolutum eſt, $x - 1 = y + 1$, et $x + 1 = 2y - 2$. Quaeratur in poſteriore valor incognitae $x$ (165), reperietur $x = 2y - 3$; valor hic in priore loco $x$ ſubſtituatur, erit $2y - 4 = y + 1$, vbi vnica tantum eſt iam incognita $y$. Similiter ſint tres aequationes $x + 2y = a$, $x - 3z = b$, $y + z = c$. Quaeratur $x$ in ſecunda (cit.); reperietur $x = b + 3z$; ac $y$ in tertia, reperietur $y = c - z$: valores hi in prima ſubſtituantur, et obtinebitur aequatio $b + 3z + 2c - 2z = a$, vbi vnica duntaxat eſt incognita $z$.

2) Aequalitate duorum cum vno tertio, cum ſcilicet e duabus aequationibus totidem valores eiusdem incognitae eliciuntur, ac deinde inter ſe comparantur. Sic in poſtremo ſuperiore exemplo ſi tam e prima, quam e ſecunda aequatione eliciatur valor incognitae $x$, erit in prima $x = a - 2y$, in ſecunda $x = b + 3z$; hinc $a - 2y = b + 3z$: eliciatur deinde e noua hac aequa-

tione valor incognitae $y$, nempe $y = \frac{a-b-3z}{2}$ idemque eliciatur e tertia ex propoſitis, nimirum $y = c - z$; erit duos hos valores conferendo $\frac{a-b-3z}{2} = c - z$, vbi vnica tantummodo eſt incognita $z$. Curandum tamen, vt diuerſi eiusdem incognitae valores e diuerſis conditionibus eruantur, ſecus eorum inter ſe collatio dabit aequationem, cuius membra adhibita reductione vtrinque fient aequalia nihilo, ac proinde ſoluendo problemati inepta.

Scholion. Quaenam eliminandi ratio in caſibus peculiaribus ſit adhibenda, vſus, et crebra exercitatio optime docebit. Illud certum, his methodis poſſe ſemper reduci quaeſtionem ad vnicam incognitam, ſiquidem problema ſit determinatum; vel ad pauciſſimas, ſi indeterminatum ſit.

168. Problema. *Reſoluere problemata determinata, in quibus vnica occurrit quantitas incognita.*

Resolut. 1) Reducatur problema ad ſuam, quam continet, aequationem (166). 2) Reducatur eadem aequatio ita, vt incognita in vno membro ſola ſit (165). 3) Inuento valore incognitae ſi problema per numeros ſolui debeat, ſuus cuiuis literae numerus ſubſtituatur, quemadmodum exigit expreſſio aequationis. Sin autem problema per lineas ſit reſoluendum, conſtruatur iuxta geometriam figura prout exigit aequatio. Quodſi repertus numerus, aut linea conditionibus proble

matis ſatisfaciat, rite facta eſt reſolutio; ſin minus erronea eſt, niſi forte problema ipſum fuerit impoſſibile.

# EXEMPLA.

I. *Inuenire numerum, cuius pars dimidia, tertia, et quarta ſimul ipſum numerum vnitate ſuperent.*

Sit quantitas incognita $= x$: quoniam vnica incognita quaeritur, vnica eſt e problematis conditionibus eruenda aequatio. Cum ergo $x$ ponatur aequalis numero quaeſito, erit eius numeri dimidium $= \frac{1}{2}x$; pars tertia $= \frac{1}{3}x$, pars quarta $= \frac{1}{4}x$: atqui problematis conditio poſtulat, vt omnes hae partes numerum $x$ vnitate ſuperent, adeoque ipſum vnitate auctum exaequent: ergo enaſcitur aequatio ſequens $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x$, $= x + 1$, quae reductis fractionibus abit in hanc $\frac{12x + 8x + 6x}{24} = x + 1$, et ſublatis iisdem in hanc $12x + 8x + 6x = 24x + 24$, ſeu reapſe addendo $26x = 24x + 24$, ac transponendo $24x$ fit $26x - 24x = 24$, id eſt, $2x = 24$: denique omnia per 2 diuidendo obtinetur $x = 12$. Rite ſolutum eſſe problema patet: nam numeri 12 pars dimidia, tertia, et quarta ſimul efficiunt ſummam 13, quae numerum ipſum 12 vnitate ſuperat, vti in problemate petebatur. En typum calculi:

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$

$\frac{12x + 8x + 6x}{24} = x + 1$

$12x + 8x + 6x = 24x + 24$

$26x = 24x + 24$

$26x - 24x = 24$

$2x = 24$

$x = \frac{24}{2} = 12.$

II. *Data ſumma, et differentia duarum quantitatum, inuenire quantitates ipſas.*

Sit ſumma data $= s$, differentia $= d$, quantitas maior $x$, erit hoc ipſo quantitas minor, $= s - x$. Quia ergo quantitates quaeſitae differunt per $d$, ſi e maiore $x$ tollatur differentia $d$, adaequabit minorem, vnde exſiſtet haec aequatio $x - d = s - x$; transferendo autem $- d$ et $- x$ erit $2x = s + d$, ac vtrinque diuidendo per $2$, $x = \frac{s+d}{2}$. Si vero quantitas minor vocetur $x$, erit maior $= s - x$, adaequabitque minorem, ſi minori addatur differentia $d$; vnde enaſcitur haec aequatio $x + d = s - x$: transponendo autem $+ d$ et $- x$ erit $2x = s - d$, ac vtrinque diuidendo per $2$, $x = \frac{s - d}{2}$. Vniuerſe ergo adparet quantitatem maiorem conſtare ex ſemiſumma addita ſemidifferentia: minorem ex ſemiſumma demta ſemidifferentia. En typum calculi:

$$x - d = s - x \qquad x + d = s - x$$
$$2x = s + d \qquad 2x = s - d$$
$$x = \frac{s + d}{2} \qquad x = \frac{s - d}{2}$$

III. *Interrogatus quiſpiam quotnam poſſideret aureos, in hunc modum reſpondit: Quarta pars meorum aureorum cum binis trientibus aequat numerum* 132 *diuiſum per ipſum illum aureorum numerum. Quaeritur aureorum numerus.*

Datus numerus 132 ſit $= a$, numerus aureorum quaeſitus $= x$, erit eius quarta pars $= \frac{1}{4}x$, duae trientes $= \frac{2}{3}x$: cum ergo quarta pars cum binis trientibus debeat aequare numerum $a$ diuiſum per $x$, habebitur haec aequatio $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x = \frac{a}{x}$; vnde reductis fractionibus erit $\frac{3x + 8x}{12} = \frac{a}{x}$, iisdemque ex vtroque membro ſublatis $3x^2 + 8x^2 = 12a$, ſeu reapſe addendo $11x^2 = 12a$, ac vtroque membro per 11 diuiſo $x^2 = \frac{12a}{11}$, et demum extracta vtrobique radice quadrata $x = \sqrt{\frac{12a}{11}} = \sqrt{\frac{12.132}{11}} = \sqrt{\frac{1584}{11}} = \sqrt{144} = 12$. Poſſidet ergo 12 aureos, quorum pars quarta cum binis trientibus, ſeu 11 aequat numerum 132 diuiſum per 12. En typum calculi:

$$\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x = \frac{a}{x}$$

$$\frac{3x + 8x}{12} = \frac{a}{x}$$

$$3x^2 + 8x^2 = 12a$$

$$11x^2 = 12a$$

$$x^2 = \frac{12a}{11}$$

$$x = \sqrt{\frac{12a}{11}} = \sqrt{\frac{12.132}{11}} = \sqrt{\frac{1584}{11}}$$

$$= \sqrt{144} = 12.$$

IV. *Abiit Vienna curſor Matritum ante dies* 4, *qui diebus ſingulis emetitur* 6 *milliaria: mittitur poſt illum alter, qui iubetur intra diem conficere* 8 *milliaria: quaeritur tempus, quo hic illum aſſequetur.*

Sit $6 = a$, $8 = b$, $4 = c$ tempus quaeſitum $= x$. Perſpicuum eſt curſores eo temporis momento conuenturos, quo milliaria ab vtroque emenſa fuerint totidem; quare amborum milliaria algebraice exprimenda, et inter ſe aequanda ſunt. Prior curſor intra dies $c$ iam confecit milliaria $ac$, confecturus adhuc intra dies $x$ milliaria $ax$; hinc milliaria ab eo, dum conueniant, emetienda ſunt $ac + ax$. Poſterior, qui perget tantum diebus $x$, conficiet milliaria $bx$: vnde conſurgit haec aequatio $ac + ax = bx$; tranſponendo $ax$ erit $ac = bx - ax$, ac vtrinque diuidendo per $b - a$ erit $\frac{ac}{b-a} = \frac{24}{2}$

$= 12 = x$. Prior ergo intra 4 praeteritos, et 12 ſequentes dies conficiet milliaria 96; totidem poſterior intra dies 12: quare poſt totidem dies priorem aſſequetur. En typum calculi:

$$ac + ax = bx$$
$$ac = bx - ax$$
$$\frac{ac}{b-a} = \frac{6.\ 4}{8-6} = \frac{24}{2} = 12 = x.$$

Scholion. Exempla ſuperiora in tironum gratiam aliquanto fuſius perſequuti ſumus: addemus hic alia compendio, in quibus reſoluendis ſeſe exercere poſſint, adiecta vbique aequatione, in quam problema reſoluitur, et valore incognitae.

1) Proponitur inuenienda haereditas $x$, ad quam ſi accederet pars dimidia, tertia, et quarta eiusdem, et ab hac ſumma tolleretur pars haereditatis duodecima, haberentur aurei 600. *Aequat.* $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{12}x = 600.$ Hinc $x = 300$.

2) Senex quidam de ſua aetate rogatus: Si annis, inquit, meis $x$ adderetur pars aetatis dimidia, et ex tota illa ſumma tolleretur pars quarta, haberem annos 99. *Aequat.* $x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x = 99.$ Hinc $x = 88$.

3) Quidam domum emturus habet venalia vaſa aliquot generoſi vini, et hunc in modum ſubducit calculum: Si pro ſingulis, inquit, vaſis ac-

quirerem 5 aureos, deeſſent mihi ad pretium domus 30 aurei; at ſi 6 aureis ſingula venderem, ſupereſſent vltra id pretium 40 aurei. Quaeritur numerus vaſorum $x$, et pretium domus. *Aequat.* $5x + 30 = 6x - 40$. Hinc $x = 70$, adeoque pretium domus $= 380$.

4) Cuidam munifico numos inter pauperes $x$ diſtribuere volenti deſunt 8 crucigeri quo minus dare poſſit ſingulis tres: quare dat ſingulis duos, et 3 crucigeri ſuperſunt. Quaeritur numerus pauperum. *Aequat.* $3x - 8 = 2x + 3$. Hinc $x = 11$.

169. PROBLEMA. *Reſoluere problemata determinata, in quibus plures occurrunt quantitates incognitae.*

RESOLUT. Reſoluatur primum problema propoſitum in ſuas aequationes (166); tum aequationes intermediae reducantur ad vnicam, in qua vna tantum occurrat quantitas incognita (167): denique poſtrema haec aequatio reducatur (165), et problema reſoluatur vt ſupra (168).

## EXEMPLA.

I. *Inuenire duos numeros, quorum ſumma ſit* 8, *differentia quadratorum* 16.

Sit $8 = a$, $16 = b$, numerus maior $= x$, minor $= y$: erit ex prima problematis conditione $x + y = a$; ex ſecunda $x^2 - y^2 = b$. Quaeratur in prima aequatione valor quantitatis $x$, erit $x = a - y$, ac eleuando vtrumque membrum ad quadratum $x^2 = a^2 - 2ay + y^2$: valore iſto in

aequatione ſecunda ſubſtituto erit $a^2 - 2ay + y^2 - y^2 = b$, ſeu $a^2 - 2ay = b$; transponendo $b$ et $-2ay$ erit $a^2 - b = 2ay$, ac omnia diuidendo per $2a$ erit $\frac{a^2 - b}{2a} = y = \frac{64 - 16}{16} = \frac{48}{16} = 3$. Et hinc $x = a - y = 8 - 3 = 5$. Et certe numeri 3 et 5 problemati ſatisfaciunt. En typum calculi:

$x + y = a \qquad x^2 - y^2 = b$

$x = a - y$

$x^2 = a^2 - 2ay + y^2$

$a^2 - 2ay + y^2 - y^2 = b$

$a^2 - 2ay = b$

$a^2 - b = 2ay$

$\frac{a^2 - b}{2a} = y = \frac{64 - 16}{16} = \frac{48}{16} = 3.$

II. *Ancilla cum ſeruo tritici metretas baiulans ſub pondere queſta eſt; cui ſeruus: Non eſt quod queraris, inquit; nam ſi e tuis metretam vnam mihi dederis, onus meum duplum erit tui; ſin autem vnam a me acceperis, idem amborum futurum eſt onus. Quaeritur quot quisque metretas baiulauerit.*

Sit numerus metretarum ancillae $= x$, ſerui $= y$. Iam ex prima problematis conditione ſi ancilla ſeruo det 1 metretam, illa habebit metretas $x - 1$, iſte $y + 1$, et hic numerus metretarum eſt illius duplus; vt igitur aequales ſiant, debet $x - 1$ per 2 multiplicari, atque ita exſurget prima aequatio $2x - 2 = y + 1$. Ex altera vero conditione ſi ſeruus det ancillae v-

nam metretam, illa habebit metretas $x+1$, iſte $y-1$, eritque ex eadem conditione aequatio ſecunda $x+1=y-1$. Quaeratur in vtraque valor quantitatis $y$, erit ex prima $y=2x-3$; ex ſecunda $y=x+2$: vnde $2x-3=x+2$, et transponendo $x$ et $-3$, $x=5$; hinc $y=x+2=5+2=7$. En typum calculi:

$$2x-2=y+1 \qquad x+1=y-1$$
$$2x-3=y \qquad x+2=y$$
$$2x-3=x+2$$
$$x=5.$$

III. *Herus cum ſeruo hunc in modum pactus eſt. Si opus feceris, inquit, accipies in dies ſingulos groſſos 6; ſi feriatus fueris, multaberis in dies groſſis 4. Elapſis a pacto diebus 30 nihil ſeruo debetur, nec ipſe debet hero. Quaeritur numerus dierum, quibus laborauit, et quibus feriatus eſt.*

Sint dies laboris $=x$, dies feriarum $=y$, $30=a$. Quoniam dies laboris, et otii ſimul ſunt 30, erit aequatio prima $x+y=a$. Et quia neuter alteri debet, merces mulctam exaequet neceſſe eſt: cum autem merces intra diem ſint 6 groſſi, erunt intra dies laboris $x$ groſſi $6x$, mulcta item intra dies otii $y$ erunt groſſi $4y$; vnde naſcitur ſecunda aequatio $6x=4y$. Quaeratur iam $x$ in vtraque aequatione, erit in prima $x=a-y$, in ſecunda $x=\frac{4y}{6}=\frac{2y}{3}$: ergo $a-y=\frac{2y}{3}$, et tollendo fractionem $3a-3y=2y$, ac transponendo $-3y$ erit $3a=5y$; diuidendo

per 5, $\frac{3a}{5} = y = \frac{3 \cdot 30}{5} = \frac{90}{5} = 18$ : hinc $x = a - y = 30 - 18 = 12$. En typum calculi:

$$x + y = a \qquad 6a = 4y$$

$$x = a - y \qquad x = \frac{4y}{6} = \frac{2y}{3}$$

$$a - y = \frac{2y}{3}$$

$$3a - 3y = 2y$$

$$3a = 5y$$

$$\frac{3a}{5} = y = \frac{3 \cdot 30}{5} = \frac{90}{5} = 18$$

IV. *Habet oenopola duo vini genera; vrna generoſioris conſtat flor.* 12, *debilioris flor.* 7; *vult haec ita permiſcere, vt habeat vrnas* 100, *quarum quaeuis conſtet* 9. *flor. Quaerit, quotnam vrnas debeat ſumere e vino meliore, quotnam e viliore ne fallat, aut ne fallatur.*

Sit $100 = a$, numerus vrnarum ſumendarum e vino meliore $= x$, e deteriore $= y$. Erit ex problematis conditione $x + y = a$; hinc etiam pretia harum vrnarum aequalia ſunt, nempe $12x + 7y = 9a$. Quaeratur iam in vtraque aequatione $x$, erit in prima $x = a - y$, in ſecunda $x = \frac{9a - 7y}{12}$: ergo $a - y = \frac{9a - 7y}{12}$, et ſublata fractione $12a - 12y = 9a - 7y$, tum transponendo $9a$ et $-12y$ erit $3a = 5y$; de-

ni-

nique omnia diuidendo per 5 erit $\frac{3a}{5} = y = \frac{300}{5}$ $= 60$; hinc $x = a - y = 100 - 60 = 40$. Et profecto 40 vrnae venditae ſingulae 12 flor. et 60 venditae ſingulae 7 flor. tantundem important pretii ſimul, quantum vrnae mixtae 100 venditae ſingulae flor. 9. En typum calculi:

$$x + y = a \qquad 12x + 7y = 9a$$

$$x = a - y \qquad x = \frac{9a - 7y}{12}$$

$$a - y = \frac{9a - 7y}{12}$$

$$12a - 12y = 9a - 7y$$

$$3a = 5y$$

$$\frac{3a}{5} = y = \frac{300}{5} = 60.$$

Scholion. Eadem, quam in his tenuimus, methodo reſoluere poterunt tirones ſuopte marte exempla ſequentia, quorum aequationes duntaxat inſinuamus.

1) Luſores duos e theatro reduces audio hunc in modum ſermocinantes. Si mihi, inquit prior, dares dimidium tuorum aureorum, haberem vltra quadruplum tui reſidui inſuper 3 aureos. At ſi mihi, reponit alter, dares e tuis tres, et dimidium aureum, tantum haberem, quantum tibi reſtaret. Quaeritur numerus aureorum $x$ quos prior, et $y$ quos poſterior habet.

*Aequat.* $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 4 \cdot \frac{1}{2}y + 3 \\ y + 3 + \frac{1}{2} = x - 3 - \frac{1}{2} \end{cases}$

2) Mater de trium filiorum aetate rogata reſpondet: primus cum tertio habet annos 24; idem cum ſecundo 18; ſecundus cum tertio 22. Quaeruntur anni primi $x$, ſecundi $y$, tertii $z$.

*Aequat.* $\begin{cases} x+z=24 \\ x+y=18 \\ y+z=22 \end{cases}$

3) Aurum, cuius vncia valet 8 flor. cum argento, cuius vncia valet 4 flor. ita permiſcendum eſt, vt habeantur vnciae 10, quarum quaeuis valeat 6. flor. Quaeritur numerus vnciarum $x$ ex auro, et $y$ ex argento accipiendarum.

*Aequat.* $\begin{cases} x+y=10 \\ 8x+4y=60 \end{cases}$

4) Quidam e foro reueniens interrogatur, quantinam veneat libra caffée, et libra ſachari. Vidi, inquit, duos emtores, primus 3 libras caffée, et 2 ſachari ſoluit groſſis 57; alter 5 libras caffée, et 4 ſachari groſſis 81. Quaeritur pretium librae caffée $x$, et ſachari $y$.

*Aequat.* $\begin{cases} 3x+2y=57 \\ 5x+4y=81 \end{cases}$

5) Diſtribuenda eſt in pauperes certa pecuniae ſumma, e qua ſi duo ſingulis darentur crucigeri, deeſſent 2; ſi vnus daretur ſingulis, ſupereſſent 10. Quaeritur numerus pauperum $x$, et ſumma pecuniae $y$. *Aequat.* $\begin{cases} 2x-2=y \\ x+10=y \end{cases}$

170. PROBLEMA. *Reſoluere problemata indeterminata, quae ad aequationes ſimplices reducuntur.*

RESOLUT. Poſtquam problema ad ſuas aequationes rite reductum eſt (166), eliminentur quotquot poſſunt quantitates incognitae (167). Si numerus incognitarum a ſeſe non pendentium vno ſuperat numerum aequationum, reſtabunt in aequatione finali duae incognitae nulla arte eliminandae; ſi duobus, reſtabunt tres; ſi tribus, quatuor etc. Peractis ergo reductionibus, ſi duae ſuperſint incognitae, valor vnius aſſumatur ad arbitrium, attamen intra limites ab intermediis aequationibus determinatos, et eo ipſo alterius valor determinatur. Si tres remanſerint incognitae, duarum; ſi quatuor, trium etc. valor aſſumendus eſt pro arbitrio.

## EXEMPLA.

I. *Inuenire duos numeros inaequales, quorum facto ſi addatur ſumma, prodeant* 34.

Sit $34 = a$ numerus quaeſitorum vnus $= x$, alter $= y$; erit eorundem factum $xy$, ſumma $x + y$: igitur e problematis conditione exſiſtit haec aequatio $xy + x + y = a$, ac tollendo vtrinque $y$ erit $xy + x = a - y$, et diuidendo per $y + 1$ obtinebitur $x = \frac{a - y}{y + 1}$. Quoniam haec aequatio nequit reduci ad vnicam incognitam, aſſumatur pro $y$ numerus quispiam, talis

nihilominus, qui minor ſit quam $a$, ne $x$ euadat quantitas negatiua. E. g. Si $y = 4$, erit $x = \frac{30}{5} = 6$. Si $y = 6$, erit $x = \frac{28}{7} = 4$. Si $y = 9$, erit $x = \frac{25}{10} = 2\frac{1}{2}$ etc. En typum calculi:

$$xy + x + y = a$$
$$xy + x = a - y$$
$$x = \frac{a - y}{y + 1}$$

II. *Inuenire duos numeros, quorum vnus in alterum ductus producat cubum perfectum, cuius radix aequet factum e primo in quadratum ſecundi.*

Sit numerus primus $= x$, ſecundus $= y$, radix cubi $= v$; erit ex prima conditione problematis $xy = v^3$, ex ſecunda $xy^2 = v$. Quaeratur $x$ in vtraque aequatione; erit in prima $x = \frac{v^3}{y}$, in ſecunda $x = \frac{v}{y^2}$; ergo $\frac{v^3}{y} = \frac{v}{y^2}$, et tollendo fractiones $v^3y^2 = vy$, ac diuidendo per $y$, $v^3y = v$, rurſus diuidendo per $v^3$, $y = \frac{v}{v^3} = \frac{1}{v^2}$. Quodſi hic valor ſubſtituatur in aequatione ſuperiore $x = \frac{v^3}{y}$, erit $x = v^5$. Aſſumi ergo poteſt pro $v$ quiuis numerus. Si $v = 3$, erit

$y = \frac{1}{v^2} = \frac{1}{9}$, et $x = v^5 = 243$. Si $v = 2$, erit $y = \frac{1}{4}$, $x = 32$ etc. En typum calculi:

$$xy = v^3 \qquad xy^2 = v$$

$$x = \frac{v^3}{y} \qquad x = \frac{v}{y^2}$$

$$\frac{v^3}{y} = \frac{v}{y^2}$$

$$v^3y^2 = vy$$

$$v^3y = v$$

$$y = \frac{v}{v^3} = \frac{1}{v^2}$$

$$x = v^5$$

III. *Inuenire numerum, qui ſi multiplicetur per* 12, *et per* 3 *ſemper gignat numerum quadratum.*

Sit $12 = a$, $3 = b$, numerus quaeſitus $= x$, radix quadrati primi $= v$, ſecundi $= y$; erit ex prima problematis conditione $ax = v^2$, ex ſecunda $bx = y^2$. Quaeratur iam $x$ in vtraque aequatione, erit in prima $x = \frac{v^2}{a}$, in ſecunda $x = \frac{y^2}{b}$: ergo $\frac{v^2}{a} = \frac{y^2}{b}$, ac per $a$ vtrinque multiplicando erit $v^2 = \frac{ay^2}{b}$, et radicem quadratam extrahendo $v = \sqrt{\frac{ay^2}{b}} = y\sqrt{\frac{a}{b}}$. Si $y = 2$, erit $v = 4$,

et $x = \frac{v^2}{a} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. Si $y = 3$, erit $v = 6$, $x = \frac{36}{12} = 3$. Si $y = 5$, erit $v = 10$, $x = \frac{100}{12} = 8\frac{4}{12} = 8\frac{1}{3}$ etc. En typum calculi.

$$ax = v^2 \qquad bx = y^2$$

$$x = \frac{v^2}{a} \qquad x = \frac{y^2}{b}$$

$$\frac{v^2}{a} = \frac{y^2}{b}$$

$$v^2 = \frac{ay^2}{b}$$

$$v = \sqrt{\frac{ay^2}{b}} = y\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Scholion. Tirones ſeſe exercere poterunt in reſoluendis ſequentibus problematis, quorum aequationes duntaxat inſinuamus.

1) Habet oenopola tria vini genera, quorum primi vrna valet 4 flor. ſecundi 6, tertii 9: haec ita permiſcere vult, vt habeantur 20 vrnae, quarum quaelibet conſtet flor. 7. Quaerit numerum vrnarum $x$ e primo, vrnarum $y$ e ſecundo, vrnarum $z$ e tertio vino ſumendarum.

*Aequat.* $\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 4x + 6y + 9z = 140 \end{cases}$

2) Floreni 240 diſtribuendi ſunt inter 50 pauperes, ita vt ſinguli viri açquirant flor. 8, mulieres ſingulae 6, pueri 2. Quaeritur numerus virorum $x$, mulierum $y$, puerorum $z$.

*Aequat.* $\begin{cases} x + y + z = 50 \\ 8x + 6y + 2z = 240 \end{cases}$

3) Vrnae vini 120 emendae ſunt florenis 600. Vrna vini vnius valet 8 flor. alterius 5, tertii 3. Quaeritur numerus vrnarum $x$ e primo, vrnarum $y$ e ſecundo, vrnarum $z$ e tertio vino emendarum.

*Aequat.* $\begin{cases} x+y+z=120 \\ 8x+5y+3z=600. \end{cases}$

---

# CAPVT III.

## *De reſolutione problematum, quae ad aequationes affectas ſecundi gradus reducuntur.*

171. PROBLEMA. *Reducere aequationem affectam ſecundi gradus.*

RESOLUT. Praeter communes reducendi methodos, quas in ſuperioribus adhibuimus, hae regulae ſpeciatim obſeruandae veniunt:

1) Si quadratum quantitatis incognitae per cognitam multiplicatum, vel diuiſum eſt, ante omnia liberetur ab eadem diuiſione, aut multiplicatione (161).

2) Cum nullum quadratum poſſit eſſe negatiuum (49), ſi quadratum incognitae negatiuum fuerit, transpoſitione fiat poſitiuum (159).

3) Termini aequationis ita ordinentur, vt primo loco ſit quadratum incognitae, ſecundo loco omnes illi termini, in quibus comparet inco-

gnita; termini meris cognitis conſtantes transponantur ad alteram aequationis partem. Si plures ſint termini, in quibus occurrit incognita, ii omnes infra ſeſe ſcripti pro vnico termino ſecundo habeantur.

## EXEMPLA.

I. $3ax^2 - ab^2 + bx^2 = cx - bx$. *Reducend.*

$$\begin{array}{l} x^2 - \dfrac{cx}{3a+b} = \dfrac{ab^2}{3a+b} \quad \textit{Reduct.} \\ + \dfrac{bx}{3a+b} \end{array}$$

II. $3ax + cx - 2bx = a^2 - cx^2$ *Reducend.*

$$\begin{array}{l} x^2 + \dfrac{3ax}{c} = \dfrac{a^2}{c} \quad \textit{Reduct.} \\ + x \\ - \dfrac{2bx}{c} \end{array}$$

III. $3a^2 = 5x^2 + c^2 = 7x - bx$ *Reducend.*

$$\begin{array}{l} x^2 + \dfrac{7x}{5} = \dfrac{3a^2 + c^2}{5} \quad \textit{Reduct.} \\ - \dfrac{bx}{5} \end{array}$$

IV. $-\dfrac{3b}{2c} - 3x + x^2 + \dfrac{b^2}{4c^2} + \dfrac{bx}{c} + \dfrac{9}{4} = a^2$ *Reducend.*

$$\begin{array}{l} x^2 + \dfrac{bx}{c} = a^2 - \dfrac{b^2}{4c^2} + \dfrac{3b}{2c} - \dfrac{9}{4} \quad \textit{Reduct.} \\ - 3x \end{array}$$

172. PROBLEMA. *Inueſtigare, an aequatio affecta ſecundi gradus contineat quadratum completum, an incompletum.*

RESOLUT. Ordinetur aequatio iuxta regulas ſuperiores; deinde diſpiciatur, an inter terminos cognitos adſit quadratum ſemiſummae earum quantitatum, per quas in ſecundo termino incognita eſt multiplicata: et ſiquidem adſit, eo ad partem incognitae translato, membrum ſiniſtrum aequationis erit quadratum completum (114): ſi vero non adſit, erit quadratum incompletum, deficiente nimirum quadrato termini ſecundi radicis binomiae, cuius terminus primus eſt ipſa incognita, ſecundus ſemiſumma coefficientium termini ſecundi aequationis.

E. g. In allatis tribus primis exemplis aequationes continent quadrata incompleta: deeſt enim in prima quadratum ſemiſummae coefficientium $-\frac{c+b}{6a+2b}$; in ſecunda quadratum ex $\frac{3a-2b}{2c}$ $+\frac{1}{2}$; in tertia quadratum ex $\frac{7-b}{10}$. At aequatio exempli vltimi quadratum habet completum, cum adſit quadratum ſemiſummae coefficientium $\frac{b}{2c}-\frac{1}{2}$, nempe $\frac{b^2}{4c^2}-\frac{3b}{2c}+\frac{2}{4}$ ſi ad partem incognitae transferatur; hinc membrum ſiniſtrum eſt perfectum quadratum, cuius radix eſt $x+\frac{b}{2c}-\frac{1}{2}$.

SCHOLION. Si aequatione ad nihilum redacta, quadratum ſemiſummae coefficientium fuerit ne-

gatiuum, aequatio non continebit quadratum completum, cum quadratum negatiuum ſit impoſſibile (49). E. g. Sit $x^2 - ax - \frac{1}{4}a^2 - bd = 0$: quoniam quadratum dimidii coefficientis termini ſecundi $-\frac{1}{4}a^2$ negatiuum eſt, traiecto ad partem dextram termino $-bd$, membrum ſiniſtrum non continebit quadratum perfectum, ſed complebitur addendo $+\frac{2}{4}a^2$.

173. PROBLEMA. *Reſoluere problemata, quae reducuntur ad aequationes affectas ſecundi gradus.*

RESOLUT. 1) Si adhibita reductione problematis ad aequationem finalem (166, 167), ac aequationis ordinatione (171), aequatio deprehendatur continere quadratum completum (172), extrahatur vtrinque radix quadrata (125), et ſoluatur problema (168, 169).

2) Si aequatio animaduertatur quadratum habere incompletum, compleatur quadratum addendo vtrique membro quadratum ſemmiſummae coefficientium termini ſecundi (114), cetera peragantur vt ante.

174. COROLL. I. Dum e quadrato ita completo radix binomia extrahitur, alteruter eius terminus ſemper eſt negatiuus, ſi in ipſa aequatione terminus ſecundus negatiuus eſt: cum enim terminus ille ſit factum e duplo radicis vnius in alteram (111), neceſſe vtique eſt alterutram radicis partem eſſe negatiuam: nam termini poſitiui non producunt factum negatiuum (48). E. g. $\sqrt{(x^2 - 2ax + a^2)} = x - a$.

175. COROLL. 2. In hoc eodem caſu ſemper duplex eſt radix. Siue enim pro radice ſumatur $x - a$, ſiue $a - x$, ſemper idem obtinetur quadratum, nimirum $x^2 - 2ax + a^2$. Quaenam ergo radix ex hiſce duabus in problematis ſolutione ſit adhibenda, e ſtatu quaeſtionis, et aequationis expreſſione diiudicandum eſt. Quando problema ſolui debet in numeris, ea radix deligenda erit, ex qua valor incognitae poſitiuus eliciatur.

## EXEMPLA.

I. *Tres burſas aureis refertas quidam reperit. In prima erant aurei* 37; *in ſecunda aureis* 23 *plures quam in tertia. Quodſi e tribus aureorum in totidem illis burſis contentorum numeris fierent quadrata, primi quadratum aequaret quadrata reliquorum ſimul. Quaeritur numerus aureorum in ſingulis burſis inuentorum.*

Sit $37 = a$, $23 = b$, numerus aureorum in tertia burſa $= x$, erit numerus aureorum in ſecunda $= b + x$; hinc quadratum numeri primi eſt $a^2$, ſecundi $b^2 + 2bx + x^2$: tertii $x^2$: ergo e problematis conditione oritur haec aequatio $b^2 + 2bx + 2x^2 = a^2$, et transponendo $b^2$, ac ordinando aequationem erit $2x^2 + 2bx = a^2 - b^2$; diuidendo omnia per 2 erit $x^2 + bx = \frac{a^2 - b^2}{2}$. Compleatur itaque quadratum

addendo vtrique membro quadratum dimidii coefficientis termini ſecundi, nempe $\frac{1}{4}b^2$, erit $x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 = \frac{a^2 - b^2}{2} + \frac{1}{4}b^2$ ſeu $- \frac{b^2}{2}$ reducendo ad denominatorem 4, $x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}b^2$. Extrahatur vtrinque radix quadrata, erit $x + \frac{1}{2}b = \sqrt{(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, ac transponendo $\frac{1}{2}b$ erit $x = \sqrt{(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}b^2)} - \frac{1}{2}b = \sqrt{(\frac{1369}{2} - \frac{529}{4})} - 11\frac{1}{2} = \sqrt{(684\frac{1}{2} - 132\frac{1}{4})} - 11\frac{1}{2} = \sqrt{552\frac{1}{4}} - 11\frac{1}{2} = 23\frac{1}{2} - 11\frac{1}{2} = 12$. Hinc $b + x = 12 + 23 = 35$.
En typum calculi:

$$b^2 + 2bx + 2x^2 = a^2$$
$$2x^2 + 2bx = a^2 - b^2$$
$$x^2 + bx = \frac{a^2 - b^2}{2}$$
$$+\frac{1}{4}b^2 \quad +\frac{1}{4}b^2 \ \textit{add.}$$
$$x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 = \frac{a^2 - b^2}{2} + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}b^2$$
$$x + \frac{1}{2}b = \sqrt{(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$$
$$x = \sqrt{(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}b^2)} - \frac{1}{2}b = \sqrt{\left\{\frac{1369}{2} - \frac{529}{4}\right\}} - 11\frac{1}{4} = \sqrt{(684\frac{1}{2} - 132\frac{1}{4})} - 11\frac{1}{2} = \sqrt{552\frac{1}{4}} - 11\frac{1}{2} = 23\frac{1}{2} - 11\frac{1}{2} = 12.$$

II. *Magiſter duas diſcipulorum erudiens claſſes rogatus de eorundem in vnaquaque claſſe numero reſpondet: ſumma diſcipulorum vtriuſque claſſis ſubducta e ſumma eorundem quadratorum relinquit* 78;

*eadem vero addita ad numerum ex eorum multiplicatione productum facit dimidium, ſeu* 39. *Quaeritur numerus diſcipulorum vtriusque claſſis.*

Sit ſumma diſcipulorum vtriusque claſſis $= 2x$ differentia $= 2y$, erit numerus maior $= x + y$, minor $= x - y$. Sit $39 = a$, erit $78 = 2a$, erit praeterea ſumma quadratorum $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2x^2 + 2y^2$, a qua ſi tollatur $2x$, erit ex prima problematis conditione $2x^2 + 2y^2 - 2x = 2a$, ſeu diuidendo per $2$, $x^2 + y^2 - x = a$. Ex altera vero conditione $(x + y) \times (x - y)$ ſeu $x^2 - y^2 + 2x = a$. Addantur iam ſibi ambae aequationes, erit $2x^2 + x = 2a$, et diuidendo per $2$, $x^2 + \frac{1}{2}x = a$. Complendo quadratum, ſeu vtrinque addendo $+ \frac{1}{16}$ erit $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = a + \frac{1}{16}$; extrahendo vtrinque radicem quadratam erit $x + \frac{1}{4} = \sqrt{(a + \frac{1}{16})}$; transponendo $\frac{1}{4}$ erit $x = \sqrt{(a + \frac{1}{16})} - \frac{1}{4} = \sqrt{(39 + \frac{1}{16})} - \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{625}{16}} - \frac{1}{4} = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = \frac{24}{4} = 6$. Eſt autem ex prima aequatione reducta $y^2 = a + x - x^2$, ergo $y = \sqrt{(a + x - x^2)} = \sqrt{(39 + 6 - 36)} = \sqrt{9} = 3$. En typum calculi:

$$2x^2 + 2y^2 - 2x = 2a$$
$$x^2 + y^2 - x = a \qquad x^2 - y^2 + 2x = a$$
$$2x^2 + x = 2a$$
$$x^2 + \tfrac{1}{2}x = a$$
$$+ \tfrac{1}{16} \quad + \tfrac{1}{16} \ \textit{add.}$$
$$x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{16} = a + \tfrac{1}{16}$$
$$x + \tfrac{1}{4} = \sqrt{(a + \tfrac{1}{16})}$$

$$x = \sqrt{\left(a + \tfrac{1}{16}\right)} - \tfrac{1}{4} = \sqrt{\left(39 + \tfrac{1}{16}\right)} - \tfrac{1}{4} = \sqrt{\tfrac{625}{16}} - \tfrac{1}{4} = \frac{25 - 1}{4} = \tfrac{24}{4} = 6.$$

III. *Quaerenti nuper quotnam ſint in regio hoc Collegio auditores phyſicae, quotnam metaphyſicae, reſpondi plures eſſe illos, quam hos; factum numeri vtrorumque efficere* 160; *differentiam quadratorum* 156. *Quaeritur numerus auditorum ſeorſim.*

Sit $160 = a$, $156 = 2b$, ſumma auditorum $= 2x$, differentia $= 2y$; erit numerus auditorum phyſicae $= x + y$, metaphyſicae $= x - y$, factum eorundem $= x^2 - y^2$. Quare ex prima conditione problematis naſcitur haec aequatio $x^2 - y^2 = a$, et $y^2$ transponendo, $x^2 = a + y^2$. Ex ſecunda conditione differentia quadratorum, ſeu $4xy = 2b$, ac diuidendo per $4y$ erit $x = \frac{b}{2y}$, et eleuando ad quadratum $x^2 = \frac{b^2}{4y^2}$; cum ergo ſupra fuerit $x^2 = a + y^2$, erit $a + y^2 = \frac{b^2}{4y^2}$; tollendo fractionem $4ay^2 + 4y^4 = b^2$, ſeu ordinando aequationem, et ſimul diuidendo per 4, $y^4 + ay^2 = \frac{1}{4} b^2$; complendo quadratum erit $y^4 + ay^2 + \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2$; adeoque radicem quadratam extrahendo $y^2 + \frac{1}{2} a = \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2\right)}$, et $\frac{1}{2} a$ transponendo $y^2 = \sqrt{\left(\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2\right)}$

$-\frac{1}{2}a$; rurſus extrahendo radicem quadratam erit $y = \sqrt{(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)})} = \sqrt{(-80 + \frac{1}{2}\sqrt{(6084 + 25600)})} = \sqrt{(-80 + 89)} = \sqrt{9} = 3$. Hinc $x = \frac{b}{2y} = \frac{78}{6} = 13$. Vnde numerus auditorum phyſicae $x + y = 16$; auditorum metaphyſicae $x - y = 10$. En typum calculi:

$$x^2 - y^2 = a \qquad 4xy = 2b$$
$$x = \frac{b}{2y}$$
$$x^2 = a + y^2 \qquad x^2 = \frac{b^2}{4y^2}$$
$$a + y^2 = \frac{b^2}{4y^2}$$
$$4ay^2 + 4y^4 = b^2$$
$$y^4 + ay^2 = \frac{1}{4}b^2$$
$$y^4 + ay^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$$
$$y^2 + \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2)}$$
$$y^2 = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2)} - \frac{1}{2}a$$
$$y = \sqrt{(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)})} = \sqrt{(-80 + \frac{1}{2}\sqrt{)6084 + 25600))}}$$
$$= \sqrt{(-80 + 89)} = \sqrt{9} = 3.$$

**IV.** *Inuenire duos numeros eius conditionis, vt quadratum primi cum eorundem facto efficiat* 55.

Sit $55 = a$, numerus primus $= x$, ſecundus $= y$, erit ex conditione problematis $x^2 + xy = a$. Complendo quadratum $x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 = a + \frac{1}{4}y^2$; extrahendo radicem quadratam erit $x + \frac{1}{2}y = \sqrt{(a + \frac{1}{4}y^2)}$, ac

tranſponendo $\frac{1}{2}y$, $x = \sqrt{(a + \frac{1}{4}y^2)} - \frac{1}{2}y$. Adparet adeo problema eſſe indeterminatum; quare pro $y$ aſſumi debet numerus ad arbitrium, eiuſmodi tamen, cuius quadratum per 4 diuiſum cum 55 faciat perfectum quadratum. Sit $y = 6$, erit $x = \sqrt{(55 + \frac{36}{4})} - 3 = \sqrt{(55 + 9)} - 3 = \sqrt{64} - 3 = 8 - 3 = 5$. En typum calculi:

$$x^2 + xy = a$$
$$x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 = a + \frac{1}{4}y^2$$
$$x + \frac{1}{2}y = \sqrt{(a + \frac{1}{4}y^2)}$$
$$x = \sqrt{(a + \frac{1}{4}y^2)} - \frac{1}{2}y.$$

Scholion. Sequentium problematum ſolutionem tironi relinquimus, addentes tantum aequationem, ad quam vnumquodque eorum reducitur.

1) Inuenire numerum $x$, qui cum 42 efficiat ſuum quadratum. *Aequat.* $x^2 = x + 42$.

2) Habeo apud me certum florenorum numerum $x$, a cuius quadrati quintuplo ſi demas quadruplum ipſius numeri, reſtabunt floreni 105. Dic numerum florenorum meorum. *Aequat.* $5x^2 - 4x = 105$.

3) Duorum luſorum vnus lucratus eſt aureos 10, qui ſi per numerum aureorum alterius multipli-

tiplicentur, et facto quadrata amborum adiiciantur, prouenient 124. Quaeritur lucrum ſecundi $x$. *Aequat.* $10x + 100 + x^2 = 124$.

4) Agricolae duo ex agro reuertebantur, aiebatque primus ad alterum: Ego 6 metretis plures ſeminaui, quam tu: et ſiquidem ſingulae metretae tantum procrearent, quantum tu ſeminaſti, inferrem in horreum metretas 135. Quaeritur numerus metretarum $x$, quem ſecundus agricola ſeminauit. *Aequat.* $x^2 + 6x = 135$.

# SECTIO IV.

## De variis quantitatum Relationibus.

## CAPVT I.

### *De Rationibus.*

176. Ratio eſt habitudo quaedam duarum eiuſdem generis quantitatum ad ſe inuicem comparatarum. Duobus autem modis poſſunt quantitates ad ſeſe comparari; nimirum vel quoad differentiam, vt innoteſcat, quantum altera differat ab altera; vel quoad quotitatem, vt innoteſcat quoties altera contineatur in altera. Hinc ratio duplex eſt, et prior quidem vocatur *arithmetica*, poſterior *geometrica*. E. g. habitudo, qua numerus 2 differt a 6, eſt ratio arithmetica: habitudo autem, qua idem numerus 2 continetur in 6 eſt ratio geometrica.

177. Coroll. Quare differentia duarum quantitatum, quae obtinetur ſubtractione, indicat earundem rationem arithmeticam: quotus, qui

oritur vnius per alteram diuiſione, indicat rationem geometricam. Sicubi ergo eadem fuerit differentia, vel idem quotus, eadem quoque erit ratio arithmetica, vel geometrica.

178. Quantitas, quae cum altera comparatur, dicitur *antecedens*, et priore loco ſcribitur; quantitas vero, quacum comparatur, adpellatur *conſequens*, et poſteriore loco ſcribitur interiectis inter vtrumque duobus punctis, e. g. $a : b$, id quod in ratione arithmetica ſic enunciatur: a *differt a* b; in geometrica ſic: a *ſe habet ad* b.

179. PROBLEMA. *Conſtruere formulam generalem, quae repraeſentet omnem rationem arithmeticam.*

RESOLUT. Cuiusuis rationis arithmeticae antecedens poteſt adpellari $a$, differentia $d$: iam conſequens vel erit maior antecedente, vel minor; ſi maior, conſtabit ex antecedente addita differentia: ergo erit $a + d$; ſi minor, conſtabit ex antecedente demta differentia: ergo erit $a - d$: ergo conſequens generatim erit $a \pm d$: ergo quaeuis ratio arithmetica bene repraeſentatur hac formula $a : a \pm d$.

180. *Exponens* rationis geometricae eſt ille quotus, qui indicat quoties antecedens, aut quota eius pars contineatur in conſequente; ſeu qui oritur diuiſione conſequentis per antecedens E. g. $3 : 6$ exponens eſt $2$; $a : b$ exponens eſt $\frac{b}{a}$; $a : am$ exponens eſt $m$.

181. COROLL. I. Si ergo antecedens maior ſit conſequente, exponens erit fractio; ſi minor, erit quantitas integra vel ſola, vel cum aliqua fractione.

182. COROLL. 2. Cum fractio quaeuis deſignet quotum e diuiſione numeratoris per denominatorem oriundum ( 65 ), quaeuis fractio denotat exponentem eius rationis, quam habet denominator ad numeratorem.

183. COROLL. 3. Si duarum rationum exponens idem fuerit, eae rationes aequales erunt ( 177 ). Hinc identitas exponentium eſt certum indicium aequalitatis rationum.

184. PROBLEMA. *Conſtruere formulam generalem, quae repraeſentet omnem rationem geometricam.*

RESOLUT. Cuiusuis rationis geometricae antecedens poteſt adpellari *a*, exponens *m*, dico conſequens fore *am*: nam diuiſor ductus in quotum producit diuidendum ( 53 ), atqui hic *a* eſt diuiſor, *m* quotus, conſequens diuidendus ( 180 ): ergo conſequens eſt *am*: ergo quaeuis ratio geometrica bene repraeſentatur hac formula, *a : am*.

185. Si duarum rationum iidem ſint exponentes eodem diuiſionis genere oriundi, nempe diuiſione conſequentium per ſuos antecedentes, termini harum rationum dicentur eſſe in eadem ratione *directa*, vt ſunt 2 : 4, 3 : 6, item *a* : *am*, *b* : *bm*.

186. At ſi exponentes iidem fuerint quidem, ſed alteruter non diuiſione conſequentis per antecedens, ſed diuiſione antecedentis per conſequens oriatur, termini eiuſmodi rationum dicentur eſſe in eadem quidem, at *reciproca* ratione, vt ſunt 2 : 4, 6 : 3, et *a* : *am*, *bm* : *b*.

187. Coroll. 1. Rationes reciprocae in directas conuertuntur, ſi termini alterutrius inuertantur, vt ſi in exemplis ſuperioribus fiat 4; 2, 6: 3; item $a: am$, $b: bm$: erit enim idem exponens eodem diuiſionis genere obtentus.

188. Coroll. 2. Poteſt etiam quaeuis ratio reciproca directa reddi, ſi retento terminorum ordine antecedens, et conſequens ſcribantur pro denominatoribus fractionum, quarum numerator ſit 1. E. g. ſi ſint duae rationes $a: am$, $bm: b$, poterit ſecunda reddi directa ſcribendo $\frac{1}{bm}: \frac{1}{b}$; erit enim vtrobique exponens idem $m$ diuiſione conſequentis per antecedens oriundus.

189. Ratio, quam habet factum ex antecedentibus plurium rationum ad factum ex earundem conſequentibus, vocatur *ratio compoſita*: ſpeciatim vero *duplicata* dicitur, ſi duarum; *triplicata*, ſi trium etc. aequalium rationum antecedentes, et conſequentes multiplicentur. E. g. $ac: bd$ eſt ratio compoſita e rationibus componentibus $a: b$ $c: d$, quae ſi inſuper inter ſe aequales ſint, ratio illa compoſita erit ſimul duplicata reſpectu rationis $a: b$, vel $c: d$, et harum quaeuis reſpectu duplicatae dicetur ſubduplicata.

190. Theorema. *Si rationis cuiuſuis geometricae tam antecedens, quam conſequens per eandem, vel per eaſdem quantitates multiplicetur, aut diuidatur, ratio non mutatur.*

Demonstr. Quaeuis enim ratio geometrica repraeſentari poteſt hac formula $a: am$ (185), et quiuis multiplicator, aut diuiſor poteſt vocari

$n$; atqui rationes $an : amn$, et $\frac{a}{n} : \frac{am}{n}$ aequantur rationi $a : am$, cum in omnibus idem ſit exponens $m$ (183): ergo ea multiplicatione, aut diuiſione ratio non mutatur.

191. Coroll. Quare aeque multipla, aut aeque ſubmultipla duarum quantitatum, eandem inter ſe habent rationem, quam ſimpla. Nam aeque multipla oriuntur, ſi vtraque per idem multiplicetur; aeque ſubmultipla, ſi per idem diuidatur.

192. Theorema. *Ratio duplicata, ſeu e duabus aequalibus orta aequatur rationi, quam habent quadrata terminorum vtriuslibet rationis componentis.*

Demonstr. Quaeuis enim duae aequales rationes duplicatam componentes poſſunt repraeſentari his formulis, $a : am$, $b : bm$ (185); ergo quaeuis ratio duplicata exhiberi poterit hac formula, $ab : abm^2$; atqui haec ratio aequatur rationi quadratorum $a^2 : a^2m^2$, vel $b^2 : b^2m^2$, cum vtrobique idem ſit exponens $m^2$ (183): ergo ratio duplicata aequatur rationi, quam habent quadrata terminorum rationum componentium.

193. Coroll. Eodem modo patet rationem triplicatam aequari rationi, quam habent cubi terminorum rationum componentium, cum ſit $abc : abcm^3 = a^3 : a^3m^3 = b^3 : b^3m^3 = c^3 : c^3m^3$ ob eundem vbique exponentem $m^3$. Imo inductione patet quamuis rationem e pluribus aequalibus compoſitam aequari ei rationi, quam

habent termini cuiuſuis rationis componentis eleuati ad eam potentiam, quam indicat numerus rationum componentium.

# CAPVT II.

## *De Proportionibus.*

194. Aequalitas duarum rationum dicitur *proportio.* Hinc ſi duae rationes aequales fuerint arithmeticae, proportio quoque erit arithmetica; ſi geometricae, geometrica. E. g. $2:5=4:7$ eſt proportio arithmetica, et ſic enunciatur: 2 *differt a* 5 *ſicut* 4 *a* 7; at $a:am=b:bm$ eſt proportio geometrica, et ſic enunciatur: a *ſe habet ad* am *ſicut* b *ad* bm.

195. Coroll. 2. Omnis ergo proportio quatuor habet terminos, duos nimirum antecedentes, et duos conſequentes.

196. Coroll. 1. Cum indicium aequalitatis rationum geometricarum ſit identitas exponentium (183), proportionis geometricae certum ſignum eſt, ſi vtraque ratio eundem habeat exponentem.

197. Problema. *Conſtruere formulam generalem, quae repraeſentet quamuis proportionem arithmeticam, vel geometricam.*

Resolut. Quaeuis ratio arithmetica vna bene repraeſentatur hac formula, $a: a\pm d$, et altera huic aequalis hac, $b: b\pm d$ (179), item quaeuis ratio geometrica vna bene repraeſentatur hac

formula, $a : am$, et altera huic aequalis hac, $b : bm$ (184); atqui duae rationes aequales faciunt proportionem (194): ergo quaeuis proportio arithmetica bene repraeſentatur hac formula, $a : a \pm d = b : b \pm d$; et quaeuis geometrica hac formula, $a : am = b : bm$.

198. Si primae rationis conſequens in ſecunda fiat antecedens, proportio adpellatur *continua*, ac terminus ille, qui ita repetitur, *medius proportionalis*. E. g. proportiones continuae ſunt $2 : 5 = 5 : 8$; $2 : 4 = 4 : 8$. In priore 5 eſt medius arithmetice, in poſteriore 4 eſt medius geometrice proportionalis inter 2, et 8.

199. Coroll. Cum cuiusuis proportionis continuae terminus primus poſſit vocari $a$, differentia $d$, aut exponens $m$, formula generalis proportionis continuae arithmeticae erit haec $a : a \pm d = a \pm d : a \pm 2d$ (179); et geometricae haec, $a : am = am : am^2$ (184).

200. Theorema. *In quauis proportione arithmetica ſumma terminorum extremorum aequatur ſummae mediorum.*

Demonstr. Quaeuis enim proportio arithmetica repraeſentatur hac formula vniuerſali $a : a \pm d = b : b \pm d$ (197), aut, ſi continua ſit, hac, $a : a \pm d = a \pm d : a \pm 2d$ (199); atqui in vtraque ſummae extremorum, et mediorum aequales ſunt, nempe in prima $a + b \pm d = a \pm d + b$; in ſecunda $2a \pm 2d = 2a \pm 2d$: ergo theorema in quauis proportione arithmetica vniuerſe obtinet.

201. Problema. *Datis tribus terminis inuenire quartum; aut datis duobus tertium; aut*

*inter duos datos medium arithmetice proportionalem inuenire.*

Resolut. 1) Si dentur tres termini $a$, $b$, $c$, et quaeratur quartus $x$, ſtabit haec proportio $a : b = c : x$; ergo $a + x = b + c$ (200) et hinc $x = b + c - a$.

2) Si datis duobus $a$, et $b$ quaeratur tertius $x$, ſtabit haec continua proportio $a : b = b : x$; ergo $a + x = 2b$ (cit.), et hinc $x = 2b - a$.

3) Si inter datos $a$ et $b$ quaeratur medius $x$ ſtabit haec proportio continua $a : x = x : b$; ergo $a + b = 2x$ (cit.), et hinc $\frac{a + b}{2} = x$.

Scholion. Tirones huiuſmodi problemata ad exempla numerica adplicent, quae nos breuitatis ſtudio praetermittimus; ſic enim fiet, vt theoremata ipſa in huiuſmodi exemplis tanquam in ſpeculis elucentia clarius perſpiciant.

202. Theorema. *In quauis proportione geometrica factum terminorum extremorum aequatur facto mediorum.*

Demonstr. Quaeuis enim proportio geometrica continetur hac formula vniuerſali $a : am = b : bm$ (197), aut, ſi continua ſit, hac, $a : am = am : am^2$ (199); atqui in vtraque factum extremorum aequatur facto mediorum, nempe in prima $abm = amb$ (46), in ſecunda $a^2m^2 = a^2m^2$: ergo theorema in quauis proportione geometrica vniuerſe obtinet.

203. Problema. *Datis tribus terminis quartum; aut datis duobus tertium; aut inter duos datos medium geometrice proportionalem inuenire.*

RESOLUT. 1) Si dentur tres termini $a$, $b$, $c$, et quaeratur quartus $x$, ſtabit haec proportio $a : b = c : x$, ergo $ax = bc$ (202), et hinc $x = \frac{bc}{a}$.

2) Si datis duobus $a$, et $b$, quaeratur tertius $x$, ſtabit haec proportio $a : b = b : x$; ergo $ax = b^2$ (cit.) et hinc $x = \frac{b^2}{a}$.

3) Si inter datos $a$, et $b$ quaeratur medius $x$, ſtabit haec proportio $a : x = x : b$; ergo $ab = x^2$ (cit.), et hinc $\sqrt{ab} = x$.

SCHOLION. In hoc problemate continetur celebris illa *regula trium*, propter vſum quotidianum *aurea* dicta, praeſcribens modum datis tribus terminis inueniendi quartum geometrice proportionalem, de qua nos capite ſequenti tractabimus.

204. THEOREMA. *Si duo quaeuis facta aequalia fuerint, factores erunt reciproce proportionales, ſeu erit factor primi facti ad factorem ſecundi, vt alter factor ſecundi ad alterum primi.*

DEMONSTR. Quaeuis enim duo aequalia facta repraeſentari poſſunt per $ad = bc$; ergo ſi hic oſtendero factores eſſe reciproce proportionales, ſeu ſtare hanc proportionem, $a : b = c : d$, id erit generatim verum; hoc autem ſic oſtendo,

Illa proportio bona eſt, in qua vtrinque idem eſt exponens (183); atqui hic vtrobique idem eſt exponens, quod probo; nam hic exponentes ſunt $\frac{b}{a}$ et $\frac{d}{c}$; atqui hi aequales ſunt; nam ex hypotheſi $ad = bc$: ergo vtrumque diuidendo per $ac$ erit $\frac{ad}{ac} = \frac{bc}{ac}$, et reducendo fractiones ad minores terminos (76) erit $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

205. THEOREMA. *Termini quatuor proportionales multimodis permutari poſſunt manente ſemper proportione.*

DEMONSTR. Cum enim omnis proportio geometrica repraeſentetur per hanc $a : am = b : bm$ (197), patet omnes permutationes, quae in hac manente proportione fieri poſſunt, in quauis alia locum habere; atqui haec varias admittit terminorum collocationes manente eodem vtrinque exponente, adeoque manente proportione (196), ſicuti perſpicuum eſt ex adiecta tabella.

$a : am = b : bm$

| | Permutationes | Expon. |
|---|---|---|
| Inuert. | $am : a = bm : b$ | $\frac{1}{m}$ |
| Altern. | $a : b = am : bm$ | $\frac{b}{a}$ |
| Compon. | $a + am : am = b + bm : bm$ | $\frac{m}{1+m}$ |
| vel | $a + am : a = b + bm : b$ | $\frac{1}{1+m}$ |
| Subtrah. | $a - am : am = b - bm : bm$ | $\frac{m}{1-m}$ |
| vel | $a - am : a = b - bm : b$ | $\frac{1}{1-m}$ |
| Conuert. | $a : a + am = b : b + bm$ | $1+m$ |
| vel | $a : a - am = b : b - bm$ | $1-m$ |

206. THEOREMA. *Si ſint duae proportiones eiuſmodi, vt conſequentes primae fiant in ſecunda antecedentes, erunt* ex aequo ordinato *reliqui termini directe proportionales.*

DEMONSTR. Quaeuis enim duae id genus proportiones repraeſentari poſſunt his formulis $\left\{\begin{array}{l} a : am = b : bm \\ am : amn = bm : bmn \end{array}\right.$ (184); atqui in his eſt $a : amn = b : bmn$, cum exponens vtrobique ſit $mn$: ergo theorema in omnibus eiuſmodi proportionibus generatim obtinet.

207 THEOREMA. *Si ſint duae proportiones eiuſmodi, vt primus conſequens primae fiat in ſecunda antecedens, et ſecundus antecedens primae fiat in ſecunda conſequens, erunt* ex aequo perturbato *reliqui termini reciproce proportionales.*

DEMONSTR. Quaeuis enim duae id genus proportiones repraeſentari poſſunt his formulis $\begin{cases} a : b = c : d \\ b : e = f : c \end{cases}$ : eſt vero in prima $ad = bc$ in ſecunda $bc = ef$: (202) ergo $ad = ef$, et hinc $a : e = f : d$ (204).

208. COROLL. Si ergo duarum proportionum vel antecedentes, vel conſequentes aequales fuerint, erunt reliqui termini directe proportionales; nam ſi in caſu primo prima proportio inuertatur, in ſecundo ſecunda, habebitur caſus theorematis n. 206. Si vero vel extremi, vel medii fuerint aequales, erunt reliqui reciproce proportionales; nam ſimili terminorum inuerſione facta habebitur caſus theorematis n. 207.

209. THEOREMA. *Si proportionis cuiuſuis antecedentes, aut conſequentes per eaſdem quantitates multiplicentur, vel diuidantur, perſtabit eorundem proportio.*

DEMONSTR. Si enim in formula vniuerſali $a : am = b : bm$ antecedentes multiplicentur per $n$, conſequentes per $o$, erit $an : amo = bn : bmo$, cum idem ſit vtrobique exponens $\frac{mo}{n}$. Si autem

loco multiplicationis diuiſio adhibeatur, erit $\frac{a}{n} : \frac{am}{o} = \frac{b}{n} : \frac{bm}{o}$, cum idem ſit vtrobique exponens $\frac{mn}{o}$.

210. Coroll. Cum ratio eadem permaneat, ſi tam antecedens, quam conſequens per eandem quantitatem multiplicetur, vel diuidatur (190), patet non mutari proportionem, ſi vel alterutrius, vel vtriusque rationis termini per idem multiplicentur, aut diuidantur. Hinc ſi ſimpla proportionalia fuerint, erunt etiam eorum dupla, tripla etc. vel ſubdupla, ſubtripla etc. proportionalia.

211. Theorema. *Si duarum, vel plurium proportionum antecedentes inter ſe, et conſequentes inter ſe multiplicentur, aut per ſe diuidantur, erunt facta, vel quoti proportionales.*

Demonstr. Sint enim formulae generales quaſuis proportiones deſignantes $\begin{cases} a : am = b : bm \\ c : cn = d : dn \\ e : eo = f : fo \text{ etc.} \end{cases}$

erit $ace : acemno = bdf : bdfmno$, cum idem ſit vtrobique exponens $mno$. Similiter ſi termini vnius per terminos alterius diuidantur, erit $\frac{a}{c} : \frac{am}{cn} = \frac{b}{d} : \frac{bm}{dn}$, cum idem ſit vtrobique exponens $\frac{m}{n}$.

212. Coroll. 1. Radicum proportionalium quaeuis eiuſdem gradus potentiae proportionales ſunt. Nam quaeuis quatuor radices proportio-

nales bene repraeſentantur per has, $a : b = c : d$: ergo ſi oſtendero harum quaſuis potentias eiuſdem gradus eſſe proportionales, id erit generatim verum; hoc autem ſic oſtendo imprimis de quadratis. Scribatur prior proportio bis, erunt facta antecedentium factis conſequentium proportionalia (211), atqui haec facta erunt quadrata: ergo quadrata erunt proportionalia. Similiter oſtenditur de cubis, ſi ea proportio ter ſcribatur; de quartis potentiis, ſi quater ſcribatur etc.

213. Coroll. 2. Et viciſſim potentiarum proportionalium quaeuis eiuſdem gradus radices proportionales ſunt. Sit enim formula generalis eiuſmodi potentiarum $a^m : b^m = c^m : d^m$, erit $a^m d^m = b^m c^m$ (202), et hinc $\sqrt[m]{a^m d^m} = \sqrt[m]{b^m c^m}$, ſeu $ad = bc$; ergo $a : b = c : d$ (204).

214. Theorema. *Si fuerint quotcunque rationes aequales, ſeu quotcunque termini proportionales, erit ſumma vel differentia omnium antecedentium ad ſummam vel differentiam omnium conſequentium, vt quiuis antecedens ad ſuum conſequentem.*

Demonstr. Plures enim id genus rationes aequales repraeſentari poſſunt his formulis generalibus $\begin{cases} a : am \\ b : bm \\ c : cm \text{ etc.} \end{cases}$ eſt autem in his ſumma omnium antecedentium $a + b + c$ ad ſummam omnium conſequentium $am + bm + cm$, ſicut

$a : am$, vel $b : bm$, vel $c : cm$; cum idem vbique ſit exponens $m$: ergo theorema vniuerſe in quotuis rationibus aequalibus obtinet. Eadem eſt demonſtratio pro differentia.

215. Theorema. *Si fuerint termini quotcunque continue proportionales, erit primus eorum ad quemlibet vt primus et ſecundus eleuati ad eam potentiam, quam deſignat duorum illorum diſtantia.*

Demonstr. Nam eiuſmodi termini continentur ſub his generalibus $a$, $am$, $am^2$, $am^3$, $am^4$ etc. atqui eſt $a : am^2 = a^2 : a^2m^2$; $a : am^3 = a^3 : a^3m^3$; $a : am^4 = a^4 : a^4m^4$ etc. ergo vniuerſe obtinet theorema de quotcunque terminis continue proportionalibus.

216. Coroll. Si ergo terminus primus vocetur $a$, ſecundus $b$, et inter primum, ac alium quemuis intercedant termini continue proportionales numero $n$, erit diſtantia primi ab illo $= n + 1$, et hinc primus erit ad illum vt $a^{n+1} : b^{n+1}$.

# CAPVT III.

## *De Regula Aurea.*

217. Regula aurea, ſeu methodus inueniendi quantitatem incognitam datis proportionalem, alia eſt *ſimplex*, ſi nempe datis tribus terminis quaeratur quartus proportionalis; alia *compoſita*, ſi nimirum aut quinque datis

ſextus,

ſextus, aut ſeptem datis octauus proportionalis deſideretur.

218. Regula autem vtraque *directa* adpellatur, ſi terminis ita collocatis, vt tertium locum occupet ille, cui quaeſtio annexa eſt, primum eiuſdem homogeneus, ſecundum is, cui quaeritur homogeneus, ſi inquam his hoc ordine collocatis deprehendatur eſſe primus ad ſecundum, vt tertius ad quartum quaeſitum. *Inuerſa* contra, vel *reciproca* dicitur, ſi tertius deprehendatur eſſe ad primum, vt ſecundus ad quartum quaeſitum.

E. g. 3 vrnae vini conſtant 16 flor. ergo 12 vrnae quanti? haec regula aurea directa eſt, quia pretia numero vrnarum ſunt directe proportionalia, adeoque $3 : 16 = 12 : x$. Contra haec, 200 militibus certa annona ſufficit 8 menſibus, ergo militibus 500 quamdiu? haec, inquam, inuerſa eſt, quia quanto plures ſunt milites 500 quam 200, tanto viciſſim plures ſunt menſes 8, quam ii, intra quos eadem annona ſufficit 500 militibus, hinc $500 : 200 = 8 : x$.

219. PROBLEMA. *Reſoluere problemata regulae aureae ſimplicis directae.*

RESOLUT. Dati tres termini collocentur hac lege, vt ille, qui quaeſtionem adnexam habet, ſeu cui reſpondens quaeritur, tertium locum occupet; e reliquis ille, qui tertio eſt homogeneus, ſeu qui eiuſdem generis rem ſignificat, primo loco ſit; medio autem ille, cui Homogeneus quaeritur. Facta hac terminorum collocatione ducatur ſecundus in tertium, et factum diuidatur per primum, quotus dabit terminum quartum quaeſitum (203).

# EXEMPLA.

I. *Inuenire pretium vaſis vini, cuius vaſa* 80 *conſtant aureis* 500.

Cum pretia numero vaſorum directe proportionalia ſint, 1 vas, quod quaeſtionem adnexam habet, ſeu cuius pretium quaeritur, ponatur loco tertio; vaſa 80 loco primo; 500 aurei loco ſecundo; pretium quaeſitum $x$ loco vltimo, ſtabitque haec proportio; $80 : 500 = 1 : x$; vnde $x = \frac{500}{80} = 6\frac{1}{4}$ aur.

II. *In equos duos intra diem expenduntur groſſi* 24; *inuenire, quotnam expendendi ſint in equos* 12.

Cum expenſae numero equorum directe proportionales ſint, ponatur loco tertio numerus equorum 12, cui quaeſtio adnexa eſt; numerus equorum 2 primo loco; 24 groſſi ſecundo; groſſi quaeſiti $x$ vltimo, ſtabitque haec proportio, $2 : 24 = 12 : x$; vnde $x = \frac{288}{2} =$ 144 groſſ. = 7 flor. 4 groſſ.

III. *Inuenire pretium* 5 *librarum cuiuſdam mercis, cuius* 6 *vnciae conſtant* 3 *flor.*

Quoniam pretia mercibus directe proportionalia ſunt, 5 librae mercis, quibus quaeſtio adnexa eſt, ponantur loco tertio; 6 vnciae primo; 3 floreni ſecundo; pretium quaeſitum $x$ vltimo. Cum vero termini homogenei, ſeu pondus mercis ſignificantes ſint diuerſae denominationis, reducautur 5 librae ad vncias, multi-

plicando nempe 5 per 16; tot enim vna libra habet vncias: ſic ergo ſtabit proportio, $6 : 3 = 80 : x$; vnde $x = \frac{240}{6} = 40$ flor.

IV. *Tres luſores compoſuerunt ſummam aureorum 45, et quidem primus contulit aureos 10, ſecundus 15, tertius 20; hac ſumma lucrati ſunt aureos 135. Quaeritur ſingulorum lucrum.*

Vocetur tota ſumma $45 = s$, totum lucrum $135 = l$, collatum primi $10 = a$, ſecundi $15 = b$, tertii $20 = c$: lucrum primi $= x$, ſecundi $= y$, tertii $= z$. Euidens eſt collatum primi eſſe ad ſuum lucrum, vt collatum ſecundi ad ſuum, et vt collatum tertii ad ſuum, hinc tres rationes $a : x$, $b : y$, $c : z$ aequales ſunt; erit ergo ſumma antecedentium $s$ ad ſummam conſequentium $l$, vt quiuis antecedens ad ſuum conſequentem (214), adeoque ſtabunt hae tres proportiones:

$$s : l = \begin{cases} a : x \\ b : y \\ c : z \end{cases} \text{ ſeu } 45 : 135 = \begin{cases} 10 : x \\ 15 : y \\ 20 : z \end{cases}$$

$$\text{hinc } \begin{aligned} x &= 30 \\ y &= 45 \\ z &= 60. \end{aligned}$$

SCHOLION. Poſtremum exemplum continet *regulam ſimplicem ſocietatis*, quae docet lucrum aut damnum commune diuidere in partes datis numeris proportionales. In huiuſmodi quaeſtionibus datorum numerorum ſumma primum locum obtinet.

numerus diſtribuendus ſecundum, ſinguli datorum tertium: deinde regula aurea ſimplex toties repetitur, quot ſunt numeri dati. Tirones exercere ſeſe poterunt in exemplis ſequentibus.

1) Tres emere volunt 4000 vrnas vini, quae venduntur 500 aureis. Primus deſiderat vrnas 1300, ſecundus 1460, tertius reliquum, nempe 1240. Quantum ergo ſoluet quilibet?

2) Tres laniones contulerunt ad emendos boues 10000 flor. et primus quidem dedit 5000, ſecundus 3000, tertius 2000; venditis bobus lucrati ſunt 15000 flor. Quantum cuique debet obuenire ex lucro?

3) Quatuor nobiles ſimul elocarunt ad cenſum annuum florenos 685620, ita vt cenſus annuus pro florenis 100 eſſent 5 flor. Primus dedit 182560 flor. ſecundus 237940, tertius 120350, quartus 144770: periit autem primi anni cenſus excurrens ad flor. 34281. Quantum quisque damni paſſus eſt?

220. Problema. *Reſoluere problemata regulae aureae ſimplicis inuerſae.*

Resolut. Ordinatis terminis, vt in probl. praeced. interdum ex natura problematis adparet terminos eo ordine non eſſe proportionales, ſed terminum tertium eſſe ad primum, vt eſt ſecundus ad quartum quaeſitum, id quod argumento eſt regulam auream eſſe inuerſam (218). Quare vt termini reddantur proportionales, terminus tertius collocetur primo loco, primus ſecundo, ſecundus tertio; quo facto problema continebit regulam auream directam, et reſoluetur vt ſupra (219).

E. g. Deſignatum opus intra menſes 8 abſoluunt operarii 100: quaeritur quot abſoluent in-

tra menſes 16. Perſpicuum eſt terminos iuxta praecedens problema ordinatos non eſſe proportionales, cum eo pauciores operarii ſufficiant abſoluendo operi, quo pluribus menſibus durat labor: patet autem, quanto plures ſunt menſes 16 quam 8, tanto viciſſim plures requiri operarios pro menſibus 8, quam pro 16: quare legitime collocatis terminis ſic ſtabit proportio, $16 : 8 = 100 : x$; vnde $x = 50$.

221. Problema. *Reſoluere problemata regulae aureae directae compoſitae.*

Resolut. Duplicem admittunt id genus problemata ſolutionem.

1) Sit propoſitum ſequens problema. Quatuor equi intra 3 menſes conſumunt 20 cubulos auenae; quantum ergo conſument equi 6 intra menſes 12? Adeſt hic praeter duas rationes, equorum nempe, et cubulorum, etiam ratio menſium. Seponatur itaque menſium diuerſitas, et quaerantur cubuli pro equis 6 conſumendi intra menſes 3, ſtabitque haec prima proportio, $4 : 20 = 6 : x$; vnde $x = 30$. Reſumatur menſium diuerſitas, et ſtabit haec proportio altera, $3 : 30 = 12 : x$ vnde $x = 120$. Sit aliud problema continens ſeptem datos terminos. Scribae 3 intra diem ſinguli ſcribendo 4 folia merentur 80 groſſos per dies 5: ergo ſcribae 5 intra diem ſinguli ſcribendo 6 folia, quantum merentur per dies 10? Problemata huiuſmodi reſolui poſſunt in tres proportiones. Et imprimis quidem habendo rationem ſolius diuerſi numeri ſcribarum, et mercedis ſtabit haec proportio, $3 : 80 = 5 : x$; vnde $x = 133\frac{1}{3}$. Aſſumta deinde diuerſi-

tate numeri foliorum, quae intra diem ſcribunt, ſtabit ſecunda haec proportio, $4 : 133\frac{1}{3} = 6 ; x$; vnde $x = 200$. Denique aſſumta diuerſitate numeri dierum, intra quos ſcribunt, ſtabit haec tertia proportio, $5 : 200 = 10 : x$; vnde $x =$ 400 groſſ. quos merentur 5 ſcribae per dies 10, ſcribendo ſinguli intra diem 6 folia.

2) Problemata huius generis reduci poſſunt ad vnicam proportionem ſimplicem, multiplicando datarum rationum antecedentes inter ſe, et conſequentes inter ſe, excepto vnico illo termino, cui homogeneus quaeritur; ſeu, quod eodem redit, multiplicando numeros, qui exprimunt res principales per ſuos ſecundarios denotantes earum rerum tempus, laborem, lucrum, damnum etc. tum haec facta ponendo pro termino primo, ac tertio, terminum autem quaeſito homogeneum pro ſecundo. Denotent enim $a$ et $b$ res principales: e. g. in exemplo ſuperiore ſcribas; $d$ et $e$, item $m$ et $n$ deſignent earum circumſtantias, e.g. in eodem exemplo labores diurnos, et laborum tempora; $c$ terminum quaeſito homogeneum, e.g. in caſu eodem 80 groſſos. Stabunt e praecedenti reſolutione hae tres proportiones:

$$a : b = c : x; \text{ vnde } x = \frac{bc}{a}$$

$$d : x = e : y; \text{ vnde } y = \frac{ex}{d} = \frac{ebc}{ad}$$

$$m : y = n : z; \text{ vnde } z = \frac{ny}{m} = \frac{ebcn}{adm}$$

Eſt ergo ſublata fractione $admz = ebcn$; ergo $adm : ben = c : z$ (204). Eodem modo problema primum e ſuperioribus in vnicam hanc proportionem reſolui poteſt: $12 : 20 = 72 : x$; vnde $x = 120$.

## EXEMPLA.

I. *Floreni* 1000 *per annos* 4 *dant cenſum flor.* 200; *ergo floreni* 3500 *quantum dabunt intra* 6 *annos?*

Multiplicentur dati floreni 1000 per numerum ſuorum annorum 4, et floreni 3500 per 6, ſtabitque hunc in modum proportio: $4000 : 200 = 21000 : x$, vnde $x = 1050$.

II. *Si vaſa ſingula coemti vini venderem* 20 *florenis, lucrarer in vaſis* 100 *florenos* 30; *quantum ergo lucrarer in vaſis* 600 *vendendo ſingula florenis* 24?

Multiplicentur vaſa 100 per 20, et vaſa 600 per 24, ſtabitque haec proportio: $2000 : 30 = 14400 : x$; vnde $x = 216$.

III. *Trabs lignea longa pedes* 4, *lata* 3, *alta* 2 *ponderat* 240 *libras: ergo quantum ponderat trabs alia ex eodem ligno longa pedes* 10, *lata* 4, *alta* 1?

Ducatur trabis vtriusque longitudo in ſuam latitudinem, et altitudinem, ſtabitque haec proportio: $24 : 240 = 40 : x$; vnde $x = 400$.

SCHOLION. Poterunt tirones eadem haec exempla, quae nos reducendo ad vnicam proportionem ſoluimus, in plures proportiones reſoluere, vt ſupra docuimus, inuenientque prorſus

eaſdem quantitates, quas hic alia methodo eruimus.

222. PROBLEMA. *Inueſtigare an regula aurea compoſita directa ſit, an reciproca.*

RESOLUT. Reſoluatur regula aurea compoſita in proportiones ſimplices, ac eae ſingulatim examinentur, an directae, an inuerſae ſint. E. g. ſit propoſitum ſequens problema. Meſſores 20 intra dies 9 demetunt iugera 15; ergo meſſores 30 quot diebus demetent iugera 45? Fiant duae hae proportiones: $\begin{matrix} 20 : 9 = 30 : x \\ 15 : x = 45 : y \end{matrix}$ patet terminos prioris eſſe reciproce proportionales, cum 30 meſſores minori tempore egeant ad demetenda 15 iugera, quam meſſores 20; vnde termini, vt reddantur proportionales, ſic erunt collocandi: $30 : 20 = 9 : x$ (220).

223. PROBLEMA. *Reſoluere problemata regulae aureae inuerſae compoſitae.*

RESOLUT. Reſoluatur regula aurea compoſita in ſuas proportiones ſimplices, et diſpiciatur, quaenam earum ſint inuerſae, quaenam directae: deinde terminus principalis prior ducatur in ſuos ſecundarios, qui ſunt in proportione directa, et in alterius ſecundarios, qui ſunt in proportione inuerſa. Similiter alter primarius ducatur vel in ſuos, vel in alterius ſecundarios; ſitque primum factum terminus primus, ſecundum factum ſit terminus ſecundus, ſi termini principales ſint in proportione directa: ſi vero ſint in reciproca, factum primum ſecundo loco ponatur, ſecundum primo; locum autem tertium ſemper occupet terminus quaeſito homogeneus.

DEMONSTR. Sint termini principales A et B, terminus quaeſito homogeneus C, ſecundarii ad A ſpectantes ſint $d$ et $m$, ad B ſpectantes $e$ et $n$. Sint iam principales A et B in proportione directa, ſecundarii $d$ et $e$ itidem in directa, at $m$ et $n$ in reciproca. Stabunt ergo iuxta hactenus tradita hae tres proportiones:

$$A : C = B : x;\ \text{vnde}\ x = \frac{BC}{A}$$

$$d : x = e : y;\ \text{vnde}\ y = \frac{xe}{d} = \frac{BCe}{Ad}$$

$$n : y = m : z;\ \text{vnde}\ z = \frac{my}{n} = \frac{BCem}{Adn}.$$

Fractione ergo ſublata erit $Adnz = BCem$: hinc $Adn : Bem = C : z$ (204). Si termini principales A et B ponerentur eſſe in ratione inuerſa, in locum A veniret B, et contra.

## EXEMPLA.

I. *Militibus* 3 *ſufficiunt librae carnis* 36 *per dies* 12; *ergo militibus* 9 *librae* 180 *quamdiu ſufficient?*

Facta reſolutione in duas proportiones adparet rationem militum eſſe reciprocam rationi dierum, rationem contra librarum eidem eſſe directam: multiplicando ergo 9 per 36, et 3 per 180, ſic ſtabit proportio $324 : 540 = 12 : x$; vnde $x = 20$.

II. *Aratra* 8 *proſcindunt* 50 *iugera intra dies* 10: *ergo* 16 *aratra quot diebus proſcindent iugera* 150?

Facta reſolutione in duas proportiones adparet aratra eſſe in ratione reciproca dierum, iugera ve-

ro in ratione directa eorundem: multiplicando igitur 16 per 50, et 8 per 150, ſic ſtabit proportio: 800: 10 = 1200: $x$; vnde $x = 15$.

III. *Scribae 25 ſcribendo intra diem 9 horis conſcribunt intra 8 dies libros chartae 36: ergo ſcribae 15 ſcribendo intra diem 8 horis quot diebus conſcribent libros $28\frac{4}{5}$?*

Numerus ſcribarum, item numerus horarum diurnarum, quibus ſcribunt, ſunt in ratione reciproca dierum; at numerus librorum, quos conſcribunt, eſt in ratione eorundem directa: ſtabunt ergo hae tres proportiones:

$$15 : 25 = 8 : x; \text{ vnde } x = \frac{25.8}{15}.$$

$$8 : 9 = x : y; \text{ vnde } y = \frac{9x}{8} = \frac{9.25.8}{8.15}$$

$$36 : y = 28\tfrac{4}{5} : z; \text{ vnde } z = \frac{144y}{5.36} = \frac{144.9.25.8}{5.36.3.15}$$

$$= \frac{144}{4.3} = 12.$$

# CAPVT IV.

## *De Progreſſionibus.*

224. **P**rogreſſio eſt ſeries quantitatum continue proportionalium. Speciatim autem progreſſio dicitur *arithmetica*, ſi quantitates fuerint continue arithmetice proportionales; *geometrica*, ſi eaedem fuerint geometrice proportionales.

E. g. numeri naturales 1, 2, 3, 4 etc. ſunt in progreſſione arithmetica; at numeri 1, 2. 4, 8, 16 etc. progreſſionem conſtituunt geometricam.

225. PROBLEMA. *Conſtruere formulam generalem, quae repraeſentet omnem progreſſionem arithmeticam.*

RESOLUT. Cuiuſuis progreſſionis arithmeticae terminus primus poteſt adpellari $a$, differentia $d$; iam ſecundus vel erit maior praecedente, vel minor: ſi maior, conſtabit ex praecedente addita differentia: ergo erit $a + d$; ſi minor, conſtabit ex praecedente demta differentia, ergo erit $a - d$: ergo generatim erit $a \pm d$. Rurſus tertius vel erit maior praecedente, vel minor: ſi maior, conſtabit ex praecedente addita differentia, ergo erit $a + 2d$: ſi minor, conſtabit ex praecedente demta differentia, ergo erit $a - 2d$: ergo generatim erit $a \pm 2d$, et ſic deinceps: ergo quaeuis progreſſio arithmetica bene repraeſentatur hac formula $a$, $a \pm d$, $a \pm 2d$, $a \pm 3d$, $a \pm 4d$ etc.

226. COROLL. 1. In quauis progreſſione arithmetica quiuis terminus conſtat termino primo addita vel demta differentia communi toties ſumta, quot ſunt termini praecedentes. Patet conſideratione formulae generalis, in qua e. g. terminus quintus $a \pm 4d$ conſtat termino primo $a$ addita, vel demta differentia communi $d$ quater ſumta, quot nempe ſunt termini quintum praecedentes.

227. COROLL. 2. Si ergo primus terminus ſit $= a$, vltimus $= \omega$, differentia $= d$, numerus terminorum $= n$, erit numerus terminorum

vltimum praecedentium $= n - 1$: hinc in progreſſione creſcente erit $\omega = a + dn - d$; in decreſcente $\omega = a - dn + d$.

228. THEOREMA. *Summa totius progreſſionis arithmeticae aequatur ſemiſummae extremorum ductae in numerum terminorum.*

DEMONSTR. Quaeuis enim progreſſio arithmetica bene repraeſentatur hac formula, $a$, $a \pm d$, $a \pm 2d$, $a \pm 3d$, $a \pm 4d$ etc. ergo ſi hic demonſtrauero ſummam totius progreſſionis aequari ſemiſummae extremorum ductae in numerum terminorum, id erit generatim verum; hoc autem ſic oſtendo. Addatur haec progreſſio in vnam ſummam, erit ſumma $= 5a \pm 10d$: iam ſumma extremorum eſt $= 2a \pm 4d$, et hinc ſemiſumma $= \frac{2a \pm 4d}{2}$, haec ducta in numerum terminorum eſt $= \frac{10a \pm 20d}{2} = 5a \pm 10d$, adeoque aequatur ſummae. Hinc ſi primus terminus ſit $= a$, vltimus $= \omega$, numerus terminorum $= n$, ſumma totius progreſſionis $= s$, erit $s = \frac{an + \omega n}{2}$, et hinc $2s = an + \omega n$.

229. PROBLEMA. *Conſtruere formulas viginti, quarum ope reſolui poſſint problemata progreſſionis arithmeticae.*

RESOLUT. 1) Ex ſupra dictis habetur $\omega = a + dn - d$ (227): e qua elici poterunt quatuor ſequentes formulae totidem problematum reſolutionem continentes:

$$1.\ a = \omega - dn + d$$

$$2.\ \omega = a + dn - d$$

$$3.\ d = \frac{\omega - a}{n - 1}$$

$$4.\ n = \frac{\omega - a + d}{d}$$

2) Ex ſupra dictis habetur $2s = an + \omega n$ (228), e qua rurſus elici poterunt quatuor ſequentes totidem problematum reſolutionem continentes:

$$5.\ s = \frac{an + \omega n}{2}$$

$$6.\ a = \frac{2s}{n} - \omega$$

$$7.\ \omega = \frac{2s}{n} - a$$

$$8.\ n = \frac{2s}{a + \omega.}$$

3) In aequatione ſuperiore loco $a$ ſubſtituatur valór e prima aequatione erutus, nempe $\omega - dn + d$, erit $2s = 2\omega n - dn^2 + dn$, e qua elici poterunt quatuor ſequentes totidem problematum reſolutionem continentes:

$$9.\ d = \frac{2\omega n - 2s}{n^2 - n}$$

$$10.\ n = \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{d^2} + \frac{\omega}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2s}{d}\right)} + \frac{\omega}{d} + \frac{1}{2}$$

11. $s = \frac{2\omega n - dn^2 + dn}{2}$

12. $\omega = \frac{2s + dn^2 - dn}{2n}$.

4) In eadem formula loco $\omega$ ſubſtituatur valor e prima aequatione ſupra erutus, nempe $a + dn - d$, erit $2s = 2an + dn^2 - dn$, e qua elici poterunt quatuor ſequentes totidem problematum reſolutionem continentes:

13. $a = \frac{2s - dn^2 + dn}{2n}$

14. $d = \frac{2s - 2an}{n^2 - n}$

15. $n = \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}\right)} - \frac{a}{d} + \frac{1}{2}$.

16. $s = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$

5) Denique in eadem formula loco $n$ ſubſtituatur valor e prima aequatione erutus, nempe $\frac{\omega - a + d}{d}$, erit $2s = a + \omega + \frac{\omega^2 - a^2}{d}$ e qua elici poterunt quatuor ſequentes totidem problematum reſolutionem continentes:

17. $a = \sqrt{(\omega^2 + \omega d - 2ds + \frac{1}{4}d^2)} + \frac{1}{2}d$

18. $\omega = \sqrt{(a^2 - ad + 2ds + \frac{1}{4}d^2)} - \frac{1}{2}d$

$$19.\quad d = \frac{\omega^2 - a^2}{2s - a - \omega}$$

$$20.\quad s = \frac{ad + \omega d + \omega^2 - a^2}{2d}$$

Scholion. Formulas has conſueſcant adplicare tirones ad problemata particularia. E. g. Dato numero primo 1, vltimo 15, numero terminorum 8, ſit quaerenda ſumma totius progreſſionis, et differentia communis. Erit in formula quinta $s = \frac{8 + 120}{2} = 64$; et in formula tertia $d = \frac{15 - 1}{8 - 1} = 2$. Similiter dato termino primo 1, differentia communi, 3, et ſumma progreſſionis 51, ſit inueniendus terminus vltimus, et numerus terminorum. Erit in formula decima octaua $\omega = \sqrt{(1 - 3 + 306 + \frac{9}{4})} - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{1225}{4}} - \frac{3}{2} = \frac{35}{2} - \frac{3}{2} = 16$; et in formula decima quinta $n = \sqrt{(102 + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4})} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \sqrt{(\frac{304}{9} + \frac{1}{4})} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1225}{36}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{35}{6}\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{33}{6} + \frac{1}{2} = \frac{36}{6} = 6$: ergo progreſſio propoſita eſt 1, 4, 7, 10, 13, 16.

230. Problema. *Inter datos duos terminos inuenire quotuis medios arithmetice proportionales.*

Resolut. Sit primus datorum $= a$, vltimus $= \omega$, numerus mediorum quaeſitorum $= m$, erit numerus omnium terminorum vna cum datis primo et vltimo $= m + 2$, adeoque idem vnitate multatus $= m + 1$: atqui ſupra fuit $d =$

$\frac{\omega - a}{n - 1}$ (229. n. 3): ergo hic pro $n - 1$ ponendo $m + 1$, erit differentia communis $d = \frac{\omega - a}{m + 1}$, quae proinde addita, vel demta termino primo $a$ dabit ſecundum; addita, vel demta ſecundo dabit tertium, et ſic porro. Hinc quaeſitae mediae proportionales in proportione creſcente erunt hae $a + \frac{\omega - a}{m + 1}$, $a + \frac{2\omega - 2a}{m + 1}$, $a + \frac{3\omega - 3a}{m + 1}$, $a + \frac{4\omega - 4a}{m + 1}$, etc Haec autem ſeries ſponte terminabitur, ſi $m$ in numeris determinetur; nempe ſeries ibi terminabitur, vbi $m + 1$ aequat coefficientem numeratoris; erit enim ille terminus $= \omega$: e. g. ſit $a = 4$, $\omega = 16$, $m = 3$, ſubſtituendo numeros pro literis, erit in ſerie terminus $a + \frac{4\omega - 4a}{m + 1} = 4 + \frac{48}{4} = 16 = \omega$, in quo adeo ſeries terminabitur, et tres praecedentes termini exhibebunt totidem quaeſitos medios proportionales 7, 10, 13.

231. Coroll. Si terminus primus maior ſit vltimo, permutetur vltimus cum primo, ita vt primus fiat vltimus, ſeu $= \omega$, vltimus fiat primus, ſeu $= a$, cetera fiant vt ante.

232. Problema. *Conſtruere formulam generalem repraeſentantem quamuis progreſſionem geometricam.*

Resolut. Cum cuiusuis progreſſionis geometricae terminus primus poſſit poni $= a$, exponens communis $= m$, erit ſecundus $= am$,

ter-

tertius $= am^2$ etc. (184), hinc omnem vniuerſe progreſſionem geometricam repraeſentabit haec formula: $a$, $am$, $am^2$, $am^3$, $am^4$ etc.

233. COROLL. 1. In progreſſione geometrica quiuis terminus conſtat termino primo ducto in exponentem eleuatum ad eam potentiam, quam indicat numerus terminorum praecedentium, ſeu numerus omnium terminorum vnitate multatus. Patet conſideratione formulae generalis, in qua e. g. terminus quintus $am^4$ conſtat termino primo $a$ ducto in exponentem $m$ eleuatum ad quartam potentiam, quot nimirum ſunt termini quintum praecedentes. Si ergo terminus primus ſit $= a$, vltimus $= \omega$, numerus terminorum $= n$, exponens communis $= m$, erit numerus terminorum vltimum praecedentium $= n - 1$, et hinc $\omega = am^{n-1}$.

234. COROLL. 2. In eadem progreſſione terminus primus eſt ad quemlibet, vt primus et ſecundus eleuati ad eam potentiam, quam deſignat numerus eum praecedentium, quocum primus comparatur (215).

235. PROBLEMA. *Conſtruere octo formulas ſoluendis problematis progreſſionis geometricae inſeruientes.*

RESOLUT. 1) Sit terminus primus $= a$, vltimus $= \omega$, exponens communis $= m$, numerus terminorum $= n$, ſumma totius progreſſionis $= s$: cum in progreſſione quiuis terminus ſit antecedens excepto vltimo, erit ſumma omnium antecedentium $= s - \omega$; et cum quiuis terminus ſit conſequens excepto primo, erit ſumma omnium conſequentium $= s$

$- a$: ſtabit adeo haec proportio $s - \omega : s - a = a : am$ (214), et hinc $sam - \omega am = sa - a^2$ (202), ſeu omnia diuidendo per $a$, $sm - \omega m = s - a$, vnde naſcuntur quatuor ſequentes formulae totidem problematum reſolutionem continentes:

$$1.\quad a = s - sm + \omega m$$

$$2.\quad \omega = \frac{a - s + sm}{m}$$

$$3.\quad s = \frac{\omega m - a}{m - 1}$$

$$4.\quad m = \frac{s - a}{s - \omega}$$

2) Quodſi in ſuperiori aequatione loco $\omega$ ſubſtituatur $am^{n-1}$ (233), erit $sm - am^n = s - a$, vnde naſcuntur tres ſequentes formulae totidem problematum reſolutionem exhibentes:

$$5.\quad a = \frac{sm - s}{m^n - 1}$$

$$6.\quad s = \frac{am^n - a}{m - 1}$$

$$7.\quad n = log. \left\{ \frac{sm - s + a}{a} \right\} : log.\, m \ (242).$$

3) Cum ſit $\omega = am^{n-1}$ (233), diuidendo vtrinque per $a$, ac radicem $n - 1$ extrahendo erit.

$$8.\quad m = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$$

SCHOLION. Conſueſcant rurſus tirones formulas has ad problemata particularia adplicare. E. g. dato termino primo 1, vltimo 243, et exponente 3, inueniri debeat ſumma totius progreſſionis: erit in formula tertia $s = \frac{729 - 1}{2} = 364$. Similiter dato termino primo 1, vltimo 243, numero terminorum 6, inueniri debeat exponens: erit in formula octaua $m = \sqrt[5]{\frac{243}{1}} = 3$

236. PROBLEMA. *Inter datos duos terminos inuenire quotuis medios geometrice proportionales.*

RESOLUT. 1) Sit primus datorum $= a$, vltimus $= \omega$, numerus quaeſitorum $= m$, primus eorundem $= x$, erit $a : \omega = a^{m+1} : x^{m+1}$ (234); vnde $ax^{m+1} = \omega a^{m+1}$ (202), ac vtrinque diuidendo per $a$, tum extrahendo radicem $m+1$, $x = \sqrt[m+1]{\omega a^m}$.

2) Cum in continua proportione terminus primus ſit ad ſecundum, vt ſecundus ad tertium, qui ſit $= x$, erit $a : \sqrt[m+1]{\omega a^m} = \sqrt[m+1]{\omega a^m} : x$, ſeu eleuando omnes terminos ad potentiam $m+1$, $a^{m+1} : \omega a^m = \omega a^m : x^{m+1}$ (144, 212); vnde $a^{m+1} x^{m+1} = \omega^2 a^{2m}$ (202), et diuidendo vtrinque per $a^{m+1}$, $x^{m+1} = \omega^2 a^{m-1}$, ac denique vtrinque extrahendo radicem $m+1$, $x = \sqrt[m+1]{\omega^2 a^{m-1}}$.

3) Cum ſit terminus ſecundus ad tertium, vt tertius ad quartum, qui ſit $= x$, erit $\sqrt[m+1]{\omega a^m}$:

$\sqrt[m+1]{\omega^2 a^{m-1}} = \sqrt[m+1]{\omega^2 a^{m-1} : x}$, et eleuando omnes terminos ad potentiam $m+1$, $\omega a^m : \omega^2 a^{m-1} = \omega^2 a^{m-1} : x^{m+1}$; vnde $\omega a^m x^{m+1} = \omega^4 a^{2m-2}$: et vtrinque diuidendo per $\omega a^m$, $x^{m+1} = \omega^3 a^{m-2}$, ac denique vtrinque extrahendo radicem $m+1$, $x = \sqrt[m+1]{\omega^3 a^{m-2}}$.

4) Inuentis vel tribus mediis proportionalibus iam adparet lex, iuxta quam ceteri etiam progrediuntur, ac proinde absque calculo vlteriore inueniuntur: nempe quiuis terminus habet praefixum ſignum $\sqrt[m+1]{\phantom{x}}$: quiuis conſtat potentiis termini vltimi $\omega$ ordine ſe excipientibus; ductis in potentias termini primi a potentia $a^m$ incipiendo ordine decreſcentibus. En ſeriem, quam efficiunt: $\sqrt[m+1]{\omega a^m}$, $\sqrt[m+1]{\omega^2 a^{m-1}}$, $\sqrt[m+1]{\omega^3 a^{m-2}}$ $\sqrt[m+1]{\omega^4 a^{m-3}}$, $\sqrt[m+1]{\omega^5 a^{m-4}}$ etc.

5) Terminabitur autem ſponte haec ſeries, ſi $m$ in numeris determinetur; nam ille terminus, in quo habebitur $a^0$, erit $= \omega$. E. g. Sit $m = 4$ erit quintus ſeriei terminus $= \sqrt[5]{\omega^5 a^0} = \sqrt[5]{\omega^5}$, $= \omega$, qui eſt terminus datus vltimus, adeoque ſeries in termino quinto definit, et quatuor praecedentes exhibent totidem quaeſitos medios proportionales. Tirones exercitationis cauſſa literis $a$, $\omega$, $m$ numeros ſubſtituant.

# CAPVT V.

## *De Logarithmis.*

237. Si progreſſioni arithmeticae numerorum naturalium a o incipienti ſubſcribatur progreſſio geometrica ab 1 incipiens, erunt termini illius terminorum huius correſpondentium *logarithmi*, vt ſi ſint hae duae progreſſiones:

$$0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4$$
$$1, \ 2, \ 4, \ 8, \ 16$$

quiuis terminus ſuperior erit inferioris logarithmus.

238. Coroll. Quodſi eiuſmodi progreſſiones vtcunque continuentur, logarithmi non habebuntur, niſi eorum numerorum, qui aderunt in ſerie inferiori; ceterorum autem intermediorum logarithmi calculo inueſtigandi erunt, vt iam dicemus.

239. Cuiusuis progreſſionis geometricae exponens poteſt poni $= 1$, et $1 = a^0$ (101): ergo quaeuis progreſſio geometrica ab 1 incipiens repraeſentari poteſt hac formula $a^0, a^1, a^2, a^3, a^4$ etc. ſi igitur haec priori ſubſcribatur

$$0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \text{ etc.}$$
$$a^0, \ a^1, \ a^2, \ a^3, \ a^4, \text{ etc.}$$

euidenter adparet ſeriem logarithmorum prorſus eandem eſſe cum ſerie exponentium, ac proinde logarithmum cuiusuis termini progreſſionis geometricae eſſe eiusdem exponentem.

240. COROLL. 1. Atqui ſi addantur exponentes factorum, habetur exponens facti (48): ergo etiam ſi in vnam ſummam addantur logarithmi factorum, obtinetur logarithmus facti. Vnde patet methodus multiplicationem ope logarithmorum ſola additione peragendi.

241. COROLL. 2. Si ab exponente diuidendi tollatur exponens diuiſoris, habetur exponens quoti (57): ergo etiam ſi logarithmus diuiſoris ſubtrahatur a logarithmo diuidendi, obtinetur logarithmus quoti. Vnde patet methodus diuiſionem ope logarithmorum ſola ſubtractione peragendi.

242. COROLL. 3. Si exponens radicis datae ducatur in exponentem potentiae quaeſitae, habetur exponens potentiae (99): ergo etiam ſi logarithmus radicis datae ducatur in exponentem potentiae quaeſitae, obtinetur logarithmus eiusdem potentiae. Vnde patet modus datum numerum ad quamuis potentiam ope logarithmorum euehendi.

243. COROLL. 4. Si exponens potentiae diuidatur per exponentem radicis datum, habetur exponens radicis quaeſitae (124): ergo etiam ſi logarithmus potentiae datae diuidatur per exponentem radicis datum, obtinetur eiusdem radicis logarithmus. Vnde patet modus e dato numero radicem quamuis ope logarithmorum extrahendi.

SCHOLION. Patet ex his egregia logarithmorum vtilitas maxime in calculo magnorum numerorum. Ad manum autem eſſe debent tabulae logarithmorum paſſim proſtantes, in quarum ma-

ximis habentur logarithmi numerorum naturalium ab 1 vſque ad 100000. Iuuat autem tironi aperire modum, quo vtiliſſimae id genus tabulae condi poſſint.

244. Problema. *Conſtruere tabulam, in qua habeantur logarithmi numerorum naturalium ab 1 e. g. vſque ad* 100000.

Resolut. 1) Aſſumatur progreſſio geometrica ab 1 incipiens, cuius exponens ſit 10, nempe $10^0$, $10^1$, $10^2$, $10^3$ etc. ſeu 1, 10, 100, 1000 etc. exponens cuiusuis termini erit eiusdem logarithmus (239), nempe vnitatis logarithmus erit 0, numeri 10 erit 1, numeri 100 erit 2 etc. At deſiderabuntur logarithmi omnium numerorum inter 1, et 10, 10 et 100 etc. intermediorum.

2) Igitur concipiatur quiuis terminus in vtraque progreſſione conſtare particulis decemmillioneſimis, ita vt 1 contineat id genus particularum decem milliones, 2 viginti milliones, 3 triginta milliones etc. vt ſcilicet ad numeros intermedios eo accuratius adproximari poſſit; abibunt duae illae progreſſiones, nempe progreſſio exponentium, ſeu logarithmorum, et progreſſio geometrica in has:

0, 0000000; 1, 0000000; 2, 0000000 3, 0000000; 4, 0000000 etc.

1, 0000000; 10, 0000000; 100, 0000000; 1000, 0000000; 10000, 0000000 etc.

3) Quaeratur iam logarithmus cuiusuis numeri intermedii, e.g. 3. Inueniatur inter 1 et 10, ſeu inter 10000000 et 100000000 medius geometrice proportionalis (203), eius logarithmus obtinebitur, ſi logarithmi numerorum 1 et 10 addantur, et ſumma per 2 diuidatur (240, 243). Rurſus inter hunc medium proportionalem, et inter 1 quaeratur medius, eique reſpondens logarithmus, atque iſta operatio tamdiu continuetur inter numeros ternario proxime maiores et minores, donec tandem deueniatur ad numerum 3, 0000000, qui a ternario ne vna quidem particula decemmillioneſima differt, cuius proinde logarithmus 0, 4771213 citra errorem pro logarithmo numeri 3 haberi poteſt. Quodſi inter numerum nunc inuentum, et inter 1, ſeu inter 1, 0000000 eodem modo quaerantur medii proportionales, ac iis reſpondentes logarithmi, reperietur etiam numerus 2, 0000000, qui a binario nec vnica decemmillioneſima diſcrepat, cuius proinde logarithmus pro logarithmo numeri 2 haberi poteſt, et ſic deinceps.

245. Coroll. Prima logarithmi cuiusuis nota a reliquis virgula ſeparatur, et *characteriſtica* dicitur: indicat enim, quot notis poſt primam conſtet numerus, cuius eſt logarithmus. Hinc numeri omnes ab 1 vſque ad 10 excluſiue habent pro logarithmi ſui characteriſtica 0; a 10 ad 100 excluſiue 1; a 100 ad 1000 excluſiue 2 etc. Adeoque characteriſtica ſemper vnitate minor eſt, numero notarum omnium eius numeri, cui logarithmus reſpondet; vt adeo dato nu-

mero illico innoteſcat characteriſtica logarithmi eidem reſpondentis.

Scholion. Non eſt neceſſe omnium numerorum intermediorum logarithmos tam operoſe indagare; cum enim numeri compoſiti plurimi ex aliorum multiplicatione oriantur, inueniuntur eorum logarithmi addendo logarithmos factorum (240). Sic inuentis logarithmis numerorum 3 et 2, habentur 1) logarithmi numerorum 9, 27, 81, 243 etc. item numerorum 4, 8, 16, 32, 64 etc. qui ſunt potentiae numerorum 3 et 2, (242). 2) Habetur logarithmus numeri 6, qui eſt factum ex 3 et 2 (240), ac proinde etiam logarithmi omnium potentiarum eiuſdem numeri 6. 3) Habetur logarithmus numeri 12, qui eſt factum ex 2 et 6; numeri 18, qui eſt factum ex 3 et 6; ac praeterea logarithmi potentiarum vtriusque numeri, et ſic deinceps.

246. Problema. *Si detur logarithmus, qui in tabulis logarithmorum non occurrit, inuenire numerum eidem reſpondentem.*

Resolut. 1) A logarithmo dato ſubtrahatur logarithmus proxime minor in tabulis occurrens, et prima haec differentia notetur.

2) Idem ille logarithmus minor ſubtrahatur a logarithmo proxime maiore in tabulis, et haec quoque altera differentia notetur.

3) Cum logarithmi in tabulis reſpondeant numeris naturalibus ordine ſeſe excipientibus, differentia numerorum poſtremis duobus logarithmis contiguis in tabula reſpondentium eſt 1. Fiat ergo haec proportio: vt differentia duorum logarithmorum contiguorum in tabulis ſe habet ad

1, ita differentia logarithmi dati a logarithmo proxime minore in tabulis ad terminum quartum, qui ſi addatur numero reſpondenti proxime minori logarithmo in tabulis, obtinetur numerus reſpondens logarithmo dato.

4) Vt autem quartus ille terminus addendus eo accuratior ſit, loco 1 in proportione ponatur 10, vel 100, vel 1000 etc. ſeu vnitas concipiatur diuiſa in partes decimas, vel centeſimas, vel milleſimas etc. ita enim acquiretur pro termino quarto fractio in partibus decimis, centeſimis, milleſimis etc. addenda numero reſpondenti logarithmo proxime minori.

## EXEMPLA.

I. *Detur logarithmus in tabulis non occurrens* 2, 1851003, *et quaeratur eidem reſpondens numerus.*

Logarithmus proxime minor in tabulis 2, 1846914 a dato ſubtractus relinquit differentiam 4089: idem ſubtractus a logarithmo proxime maiore in tabulis 2, 1875207 relinquit differentiam 28293. Stabit ergo haec proportio: 28293: 1 ſeu 100 = 4089 : $x$, vnde $x = \frac{14}{100}$; ſi igitur haec fractio addatur numero 153 reſpondenti in tabulis logarithmo proxime minori, obtinebitur numerus a quaeſito vna centeſima non diſſidens.

II. *Detur logarithmus in tabulis non occurrens* 3, 7589982, *et quaeratur eidem reſpondens numerus.*

Logarithmus proxime minor in tabulis 3, 7589875 a dato ſubtractus relinquit differentiam 107; idem ſubtractus a logarithmo proxime maiore in tabulis 3, 7590632 relinquit differentiam 757. Fiat ergo haec proportio: 757: 1000 = 107: $x$, erit $x = \frac{141}{1000}$: quare ſi haec fractio addatur numero 5741 reſpondenti logarithmo proxime minori in tabulis, obtinebitur numerus a quaeſito vna milleſima non diſcrepans.

247. Coroll. 1. Quodſi dati logarithmi characteriſtica tot vnitatibus augeatur, quot notae in fractione adiicienda deſiderantur, et quaeratur numerus in tabulis logarithmo ſic aucto proxime reſpondens, e quo verſus dextram tot notae reſecentur, quot vnitates ad dati logarithmi characteriſticam erant additae, erunt hae notae fractio, cuius denominator praeter 1 tot habet zeros, quot ſunt notae in numeratore, atque ita habebitur numerus dato logarithmo proxime reſpondens. Nam logarithmus, cuius characteriſtica augetur vna, duabus, tribus etc. vnitatibus, euadit hoc ipſo logarithmus numeri eiuſdem, cuius antea fuit, ſed iam multiplicati per 10, 100, 1000 etc. (240): ſi ergo huius producti valor diuidatur per 10, 100, 1000 etc. hoc eſt, ſi reſecentur a dextris vna, duae, tres etc. notae (59) habebitur numerus quaeſitus vna cum ſua fractione.

E. g. ſi quaeratur numerus reſpondens logarithmo 1, 5342678, habens adnexas duas notas fractionis, addantur characteriſticae vnitates duae, vt ſit 3, 5342678, eritque numerus eidem in tabulis proxime reſpondens 3422, e quo

ſi duae poſtremae notae pro fractione reſecentur, obtinebitur numerus 34 $\frac{22}{100}$ a quaeſito ne vna quidem centeſima diſſidens. Si tres additae fuiſſent ad characteriſticam vnitates, inuentus fuiſſet numerus in tabulis maioribus, qui a quaeſito ne vna quidem milleſima differret, et ſic porro.

248. COROLL. 2. Si logarithmus datus excedat omnes eos, qui in tabulis continentur, ab eo ſubtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000 etc. donec relinquatur logarithmus minor, quam ſit vltimus in tabulis: quaeratur deinde numerus huic reſiduo reſpondens in tabulis, ac multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000 etc. factum erit numerus quaeſitus. Numerus enim huic reſiduo reſpondens eſt numerus quaeſitus per 10, vel 100, vel 1000 etc. diuiſus (241); ergo ſi diuiſio tollatur contraria multiplicatione obtinebitur ipſe numerus quaeſitus.

E. g. Quaeratur numerus reſpondens logarithmo 6, 6872682: ſubtrahatur ex eo logarithmus numeri 1000, qui eſt 3, 0000000, reſtabit 3, 6872682, cui proxime reſpondet in tabulis numerus 4867, qui ductus in 1000 dabit numerum proxime quaeſitum 4867000.

249. PROBLEMA. *Inuenire logarithmum numeri habentis adnexam fractionem decimalem, ſeu cuius denominator eſt 1 cum vno, vel pluribus zeris.*

RESOLUT. Quaeratur logarithmus conueniens dato numero ita conſiderato, ac ſi cum notis fractionis conſtitueret vnum numerum integrum; deinde a logarithmi reperti characteriſtica demantur tot vnitates, quot habet notas fractio nume-

ro adiecta; obtinebitur logarithmus quaeſitus (247).

E. g. Quaeratur logarithmus reſpondens numero 23,$\frac{42}{100}$: conſideretur is quaſi eſſet 2342, cuius logarithmus eſt 3, 3695869, e cuius characteriſtica ſi tollantur duae vnitates, reſtabit numeri dati logarithmus 1, 3695869.

250. PROBLEMA. *Inuenire logarithmum numeri maioris, quam ſint ii, quorum logarithmi habentur in tabulis.*

RESOLUT. 1) Reſecentur a dextris numeri dati tot notae, quot vnitatibus excedit characteriſtica logarithmi dato numero reſpondentis (245) characteriſticam maximam in tabulis, et quaeratur logarithmus reliquarum notarum in tabulis, isque a proxime maiori ſubducatur, et notetur prima haec differentia, cui reſpondet differentia numerorum logarithmis illis in tabula reſpondentium, quae erit 10, vel 100, vel 1000 etc. prout vna, vel duae, vel tres etc. notae a dato numero reſectae ſunt.

2) Fiat deinde haec proportio: vt 10, vel 100, vel 1000 etc. ad differentiam logarithmorum ſupra inuentam, ita notae a numero dato reſectae ad differentiam, qua logarithmus quaeſitus ſuperat proxime minorem in tabulis: quare ſi haec inuenta addatur logarithmo illi minori, et characteriſtica prior reſtituatur, habebitur logarithmus quaeſitus. Nam differentiae duorum logarithmorum contiguorum ſub quauis characteriſtica ſunt aequales quantum ad praxes ordinarias attinet, licet haec aequalitas reapſe non habeatur.

# EXEMPLA.

I. *Quaeratur logarithmus numeri* 3647093 *ſuperantis omnes eos, quorum logarithmi habentur in tabulis.*

Cum characteriſtica logarithmi numero huic reſpondentis ſit 6 (245), et maxima characteriſtica in tabulis ſit 4, e dato numero reſecentur duae dextimae notae 93, erit reliquarum 36470 logarithmus in tabulis 4, 5619357, et logarithmus proxime maior 4, 5619476, adeoque differentia logarithmorum = 119: vnde ſtabit haec proportio: 100: 119 = 93: $x$, eritque $x = 111$; quare ſi hic valor addatur logarithmo minori 4, 5619357, et characteriſtica 6 reſtituatur, obtinebitur logarithmus numeri propoſiti 6, 5619468.

II. *Quaeratur logarithmus numeri* 92375, *at ſit in tabulis minoribus maxima characteriſtica* 3.

Cum propoſiti numeri characteriſtica ſit 4 (245), reſecetur e dato numero a dextris vna nota, erit reliquarum 9237 logarithmus in tabulis 3, 9655309, qui ſubductus e proxime maiore 3, 9655780 relinquit differentiam 471; quare haec ſtabit proportio: 10: 471 = 5: $x$, id eſt 2: 471 = 1: $x$ (209), vnde $x = 235$: ſi ergo hic valor addatur logarithmo minori 3, 9655309, et characteriſtica 4 reſtituatur, obtinebitur logarithmus numeri propoſiti 4, 9655544.

251 PROBLEMA. *Inuenire logarithmum fractionis, cuius numerator minor eſt denominatore.*

RESOLUT. Logarithmus numeratoris ſubtrahatur a logarithmo denominatoris, reſiduum praefixo ſigno — erit logarithmus quaeſitus. Cum enim fractio ſit quotus e diuiſione numeratoris per denominatorem oriundus (65), eius logarithmus habetur, ſi logarithmus denominatoris ſubtrahatur a logarithmo numeratoris (241), ſeu ſi mutato ſigno eidem addatur, quo in caſu differentia euadit negatiua (37).

E. g. ſi quaeratur logarithmus fractionis $\frac{5}{8}$, e logarithmo denominatoris, qui eſt 0, 9030900, ſubtrahendus eſt logarithmus numeratoris 0, 6989700, ac reſiduum — 0, 2041200 cum ſigno — erit logarithmus quaeſitus.

252. COROLL. 1. Cum ergo logarithmus vnitatis meris zeris conſtet, omnes fractiones, quarum numerator eſt 1, habent pro logarithmo denominatoris logarithmum, ſed cum ſigno —.

253. COROLL. 2. Si numerator fractionis maior fuerit denominatore, eius logarithmus poſitiuus erit: obtinetur enim, ſi a logarithmo numeratoris maiore ſubtrahatur logarithmus minor denominatoris (241).

254. COROLL. 3. Si integro adhaereat fractio, poteſt totus numerus reduci ad fractionem impropriam (78), atque ita eius logarithmus

inueniri. E. g. numeri $9\frac{1}{3} = \frac{28}{3}$ logarithmus eſt 1, 4471580 — 0, 4771212 = 0, 9700368.

255. Coroll. 4. Dato logarithmo negatiuo facile inuenitur fractio reſpondens, ſi quaeratur numerus eiuſdem logarithmi poſitiui, et hic tanquam denominator vnitati ſubſcribatur (252). E. g. ſi detur logarithmus — 1, 8260748, fractio eidem reſpondens erit $\frac{1}{67}$.

256. Coroll. 5. Idem obtinebitur, ſi dato logarithmo negatiuo addatur logarithmus vltimus in tabulis reſpondens numero 10000, aut 100000, ſeu ſi ille ab hoc ſubtrahatur, et reſiduo reſpondens numerus quaeratur (246): erit enim ille numerus fractionis quaeſitae numerator, ac 10000, vel 100000 denominator. Nam ſit illa fractio $= f$, numerator $= n$, denominator $= d$, numerus reſiduo illi reſpondens $= x$, cum fractio ſit quotus e diuiſione numeratoris per denominatorem oriundus (65), erit vnitas ad eam vt denominator ad numeratorem, ſeu $1 : f = d : n$ (52); atqui cum ea logarithmorum additione fractio quaeſita multiplicetur per 10000, vel per 100000, (240), erit vnitas ad eandem fractionem vt 10000, vel 100000 ad numerum reſiduo logarithmo reſpondentem ſeu $1 : f = 10000 : x$ (47): ergo $d : n = 10000 : x$, quare ſi $d$ ponatur $= 10000$, erit $n = x$.

CA-

# CAPVT VI.

## *De Seriebus.*

257. Series eſt ordo quantitatum certa aliqua, et conſtanti lege ſeſe excipientium. E. g. progreſſiones arithmeticae, et geometricae ſunt ſeries; nam termini earum conſtanter iuxta eandem differentiam, aut exponentem progrediuntur.

258. Series *finita* dicitur, ſi numerus terminorum finitus; *infinita*, ſi hic infinitus eſt.

259. COROLL. 1. Si in ſerie infinita occurrat terminus quiſpiam infinite magnus, qualis in progreſſione arithmetica eſt $a + \infty d$, in geometrica $am^{\infty}$, ceteri termini finitam habentes magnitudinem cum eo collati euaneſcunt, ac proinde nihilo aequales poni poſſunt. E. g. $a^{\infty} + a^2 = a^{\infty}$; $\infty m - 8m = \infty m$.

260. COROLL. 2. Similiter ipſi termini infinite magni collati cum infinities infinite magnis, et hi ipſi collati cum infinities infinities infinite magnis, ſeu generatim omnis magnitudo infinita inferioris ordinis collata cum magnitudine infinita ſuperioris ordinis euaneſcit, atque adeo nihilo aequalis poni poteſt. E. g. $3\infty^2 + 2^{\infty} = 3\infty$; $\frac{1}{4}\infty^4 - 5\infty^3 = \frac{1}{4}\infty^4$.

261. COROLL. 3. Eodem modo termini infinite parui collati cum finitis euaneſcunt. E. g. $2a+\frac{a}{\infty}=2a$; eſt enim fractio habens numeratorem finitum, denominatorem infinitum infinite parua (70).

262. COROLL. 4. Imo etiam quantitas infinities infinite parua reſpectu infinite paruae, et quantitas infinities infinities infinite parua reſpectu infinities infinite paruae, ſeu generatim omnis paruitas infinita ſuperioris ordinis euaneſcit reſpectu paruitatis infinitae inferioris ordinis. E. g. $\frac{1}{\infty^3}-\frac{3}{\infty^2}+\frac{2a}{3\infty}=\frac{2a}{3\infty}$.

SCHOLION. Innumerabiles haberi poſſunt ſerierum ſpecies. Nos hic de iis tantum agemus, quarum vſus in ſequentibus erit neceſſarius. Quare ſeries numerorum figuratorum, et polygonorum praetermittemus: ſeries contra potentiarum pertractabimus.

263. PROBLEMA. *Inuenire ſummam fractionum infinitarum, quarum numerator conſtans eſt, denominatores autem creſcunt in progreſſione geometrica.*

RESOLUT. Quiuis numerator conſtans poteſt adpellari $d$, et quaeuis progreſſio geometrica creſcens bene repraeſentatur hac formula, $b, bm, bm^2, bm^3, ---- bm^{\infty}$ (232): ergo quaeuis eiusmodi fractionum ſeries repraeſentari poteſt

hac formula, $\frac{d}{b}$, $\frac{d}{bm}$, $\frac{d}{bm^2}$, $\frac{d}{bm^3}$ ---- $\frac{d}{bm^\infty}$. Iam cum haec formula ob denominatores creſcentes exhibeat ſeriem progreſſionis geometricae decreſcentis (70), ſi ſcribatur inuerſo ordine $\frac{d}{bm^\infty}$ -- $\frac{d}{bm^3}$, $\frac{d}{bm^2}$, $\frac{d}{bm}$, $\frac{d}{b}$, repraeſentabit ſeriem progreſſionis geometricae creſcentis: eſt autem in eiusmodi progreſſione ſumma $s = \frac{\omega m - a}{m - 1}$ (235): ſi ergo pro $\omega$ ponatur terminus vltimus $\frac{d}{b}$, et terminus primus $a$, ſeu $\frac{d}{bm^\infty}$ negligatur (261), erit $s = \frac{dm}{bm - b}$.

264. PROBLEMA. *Inuenire ſummam infinitarum fractionum, quarum numeratores creſcunt in progreſſione arithmetica, denominatores in geometrica.*

RESOLUT. Quaeuis progreſſio arithmetica creſcens bene repraeſentatur hac formula, $a$, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$ etc. (225), et quaeuis geometrica creſcens hac formula, $a$, $am$, $am^2$, $am^3$ etc. (232): ergo quaeuis eiusmodi fractionum ſeries repraeſentari poteſt hac formula:

$\frac{a}{b}, \frac{a+d}{bm}, \frac{a+2d}{bm^2}, \frac{a+3d}{bm^3}$ etc. Scribantur ſinguli termini ſeorſim hoc modo: $\frac{a}{b} \Big| \frac{a}{bm} + \frac{d}{bm} \Big| \frac{a}{bm^2} + \frac{d}{bm^2} + \frac{d}{bm^2} \Big| \frac{a}{bm^3} + \frac{d}{bm^3} + \frac{d}{bm^3} + \frac{d}{bm^3} \Big|$ + etc. Deinde ſcribantur in vna ſerie omnes termini primi, in altera omnes ſecundi, in tertia omnes tertii etc. naſcentur inde hae ſeries particulares:

$\frac{a}{b}, \frac{a}{bm}, \frac{a}{bm^2}, \frac{a}{bm^3} \text{-----} \frac{a}{bm^\infty}$, cuius ſumma

$= \frac{am}{bm-b}$ (263)

$\frac{d}{bm}, \frac{d}{bm^2}, \frac{d}{bm^3} \text{-----} \frac{d}{bm^\infty}$ cuius ſumma

$= \frac{d}{bm-b}$ (cit.)

$\frac{d}{bm^2}, \frac{d}{bm^3} \text{-----} \frac{d}{bm^\infty}$ cuius ſumma

$= \frac{d}{bm^2-bm}$ (cit.)

$\frac{d}{bm^3} \text{----------} \frac{d}{bm^\infty}$ cuius ſumma

$= \frac{d}{bm^3-bm^2}$ etc. (cit.)

Perſpicuum vero eſt has ſummas particulares, excepta prima conſtituere ſeriem fractionum infinitarum quarum, numerator $d$ eſt conſtans, denomi-

natores autem creſcunt in progreſſione geometrica, cuius exponens eſt $m$: erit ergo huius ſeriei ſumma, id eſt ſumma omnium terminorum ſecundorum, tertiorum, quartorum etc. $= \frac{dm}{bm^2 - 2bm + b}$ (263), cui ſi addatur ſumma primae ſeriei, ſeu omnium terminorum primorum $\frac{am}{bm - b}$, erit facta ad eundem denominatorem reductione (quod fiet multiplicando poſterioris fractionis terminos per $m - 1$) ſumma totius ſeriei propoſitae $= \frac{am^2 - am + dm}{bm^2 - 2bm + b}$.

265. PROBLEMA. *Inuenire theoremata generalia pro quauis potentia termini vltimi numerorum naturalium ſeriem finitam conſtituentium.*

RESOLUT. Numeri naturales quotcunque bene repraeſentantur per $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, qui quoniam vnitate inter ſe differunt, erit $e = d + 1$; $d = c + 1$; $c = b + 1$; $b = a + 1$; eleuatis ergo his terminis ad potentias ordine ſeſe excipientes, erit

| | |
|---|---|
| $e^2 = d^2 + 2d + 1$ | $e^3 = d^3 + 3d^2 + 3d + 1$ |
| $d^2 = c^2 + 2c + 1$ | $d^3 = c^3 + 3c^2 + 3c + 1$ |
| $c^2 = b^2 + 2b + 1$ | $c^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1$ |
| $b^2 = a^2 + 2a + 1$ | $b^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ |

$$e^4 = d^4 + 4d^3 + 6d^2 + 4d + 1$$
$$d^4 = c^4 + 4c^3 + 6c^2 + 4c + 1$$
$$c^4 = b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1$$
$$b^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$$

Quodſi iam in valore potentiarum termini vltimi $e^2$, $e^3$, $e^4$ aequalibus aequalia ſubſtituantur, nempe loco primi termini ponatur ſeries ſequens eidem aequalis, loco primi ſequentis tertia, loco primi tertiae quarta, erit

$$\begin{array}{r|r} e^2 = 2d + 1 & e^3 = 3d^2 + 3d + 1 \\ + 2c + 1 & + 3c^2 + 3c + 1 \\ + 2b + 1 & + 3b^2 + 3b + 1 \\ a^2 + 2a + 1 & a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} e^4 = 4d^3 + 6d^2 + 4d + 1 \\ + 4c^3 + 6c^2 + 4c + 1 \\ + 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1 \\ a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1 \end{array}$$

Hoc eſt; 1) Quadratum termini vltimi conſtat quadrato termini primi, duplo omnium terminorum praecedentium, ac numero eorundem. 2) Cubus termini vltimi conſtat cubo termini primi, triplo quadrato terminorum praecedentium, triplo terminorum praecedentium, ac numero eorundem. 3) Potentia quarta conſtat potentia quarta termini primi, quadruplo cubo terminorum praecedentium, ſextuplo quadrato eorundem, quadruplo eorundem, ac denique numero eorundem. Patet haec theoremata ad quaſuis potentias eadem ratione extendi poſſe.

266. Coroll. Si ergo in ſerie numerorum naturalium terminus primus ſit $= a$, vltimus $= \omega$,

ſumma ſeriei $= s$, erit ſumma terminorum vltimum praecedentium $= s - \omega$, numerus eorundem $= \omega - a$, ſumma quadratorum eorundem $s^2 - \omega^2$, ſumma cuborum $s^3 - \omega^3$; hinc priora theoremata facta ſubſtitutione, et adhibita reductione ſequentibus formulis exhibebuntur:

1) $\omega^2 = a^2 + 2s - \omega - a.$

2) $\omega^3 = a^3 - 3s^2 + 3\omega^2 + 3s - 2\omega - a,$

3) $\omega^4 = a^4 + 4s^3 - 4\omega^3 + 6s^2 - 6\omega^2 + 4s - 3\omega - a.$

267. PROBLEMA. *Inuenire ſummam potentiarum numerorum naturalium ſeriem infinitam conſtituentium.*

RESOLUT. 1) In formula prima ſuperiore quaeratur valor ſummae $s$, erit $s = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$. Quia vero ſeries infinita eſt, erit terminus vltimus $\omega = \infty$; hoc ergo valore ſubſtituto erit $s = \frac{1}{2}\infty^2 + \frac{1}{2}\infty - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\infty^2$ (259, 260) $= \frac{\infty \times \infty}{2}$.

2) In formula ſecunda quaeratur ſumma quadratorum $s^2$, et ſimul pro $s$ ſubſtituatur $\frac{1}{2}\infty^2$; erit $s^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \omega^2 - \frac{1}{2}\infty^2 + \frac{2}{3}\omega - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a$, ac pro $\omega$ ponendo $\infty$, erit $s^2 = \frac{1}{3}\infty^3 + \infty^2 - \frac{1}{2}\infty^2 + \frac{2}{3}\infty - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}\infty^3 = \frac{\infty^2 \times \infty}{3}$.

3) In formula tertia quaeratur ſumma cuborum $s^3$, et pro $s$, ac $s^2$ ſubſtituantur valores iam reperti $\frac{1}{2}\infty^2$ et $\frac{1}{3}\infty^3$, erit $s^3 = \frac{1}{4}\omega^4 + \omega^3 - \frac{1}{2}\infty^3 + \frac{3}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\infty^2 + \frac{1}{4}\omega - \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{4}a$; ac pro $\omega$ ponendo $\infty$, erit $s^3 = \frac{1}{4}\infty^4 + \infty^3 - \frac{1}{2}\infty^3 + \frac{3}{2}\infty^2 - \frac{1}{2}\infty^2 + \frac{1}{4}\infty - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}\infty^4 = \frac{\infty^3 \times \infty}{4}$. Habemus ergo has formulas:

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{\infty \times \infty}{2} \\ s^2 &= \frac{\infty^2 \times \infty}{3} \\ s^3 &= \frac{\infty^3 \times \infty}{4} \end{aligned}\right\} \quad \text{Generatim } s^m = \frac{\infty^m \times \infty}{m+1}.$$

Quare conſiderata lege, qua hae formulae progrediuntur, facile eruuntur ſequentia theoremata:

1) Summa numerorum naturalium ſeriem infinitam conſtituentium aequatur facto ex termino vltimo in numerum terminorum diuiſo per 2.

2) Summa quadratorum aequatur facto ex quadrato termini vltimi in numerum terminorum diuiſo per 3.

3) Summa cuborum aequatur facto ex cubo termini vltimi in numerum terminorum diuiſo per 4.

4) Generatim ſumma quarumuis potentiarum aequatur facto ex eadem potentia termini vltimi in numerum terminorum diuiſo per exponentem potentiarum vnitate auctum.

268. PROBLEMA. *Inuenire ſummam radicum numerorum naturalium ſeriem infinitam conſtituentium.*

RESOLUT. Ex praecedente problemate habetur $s^m = \frac{\infty^m \times \infty}{m+1}$: ſi ergo loco $m$ ponatur $\frac{1}{2}$, eadem formula repraeſentabit ſummam radicum quadratarum; ſi pro $m$ ponatur $\frac{1}{3}$, repraeſentabit ſummam radicum cubicarum etc. (102) enaſceutur igitur hae formulae:

$$\left.\begin{array}{l} s^{\frac{1}{2}} = \sqrt{s} = \frac{2}{3}\infty^{\frac{1}{2}} \times \infty \\ s^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{s} = \frac{3}{4}\infty^{\frac{1}{3}} \times \infty \\ s^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{s} = \frac{4}{5}\infty^{\frac{1}{4}} \times \infty \end{array}\right\} \text{Generatim } s^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{s}$$

$$= \frac{m}{m+1}\,\infty^{\frac{1}{m}} \times \infty.$$

Hinc autem eruuntur ſequentia theoremata.

1) Summa radicum quadratarum numerorum naturalium ſeriem infinitam conſtituentium aequatur duabus tertiis partibus facti ex radice quadrata termini vltimi in numerum terminorum.

2) Summa radicum cubicarum aequatur tribus quartis partibus facti ex radice cubica termini vltimi in numerum terminorum.

3) Summa radicum quartarum aequatur quatuor quintis partibus facti ex radice quarta termini vltimi in numerum terminorum.

4) Generatim ſumma quarumuis radicum aequatur fractioni habenti pro numeratore exponentem radicum, pro denominatore eundem exponentem vnitate auctum, ductae in eandem radicem termini vltimi, et in numerum terminorum.

*Finis Elementorum Algebrae.*

# ELEMENTA
# GEOMETRIAE.
## *PROLEGOMENON.*

269.

G*eometria* eſt ſcientia demonſtrans proprietates quantitatis continuae, ſeu extenſae.

270. Coroll. Quantitas extenſa tres habere poteſt dimenſiones, nimirum in longum, latum, et profundum. Quare geometria omnis aptiſſime tribuetur in partes totidem, quarum prima complectatur ſolam extenſi longitudinem; altera eandem iunctam latitudini; poſtrema omnes tres ſimul dimenſiones.

271. *Punctum* adpellatur, cuius pars nulla omnino eſt. *Linea* eſt longitudo absque vlla latitudine, et profunditate. *Superficies* eſt longitudo ſimul et latitudo absque vlla profunditate. *Solidum* denique, vel *corpus* eſt, quod patet in longum, latum, et profundum.

Fig. 2. Scholion. Vt vis harum definitionum perſpicue intelligatur, fingamus tabellam AB probe expolitam, cuius pars C imbuta ſit colore albo, D nigro, E rubro, F ceruleo. Limes KL exhibebit notionem lineae vtpote ſolam habens longitudinem absque vlla latitudine: nam ſi in partem alterutram tantulum declines, non iam in colorum limite, ſed in colore alterutro conſiſtes. Concurſio limitum KL et GH in I puncti ideam ſuggeret; neque enim vllam habet longitudinem, vel latitudinem. Quodſi tabella AB aliquam habeat craſſitudinem, limes interius dirimens partes C et D, ſiue ſectio iuxta rectam KI facta habebit longitudinem KI, et ſimul tantam latitudinem, quanta eſt tabellae craſſitudo: at profunditate prorſus carebit, et hinc ſuperficiem repraeſentabit.

272. Si punctum continuo motu fluere cogitetur, eo fluxu generabit lineam ſola longitudine gaudentem: linea ductu transuerſo mota gignet ſuperficiem: haec eodem motu ſolidum efficiet.

273. Coroll. 1. Si punctum ita moueatur, vt in nullam partem deflectat, via eiuſdem erit linea *recta*: ſin autem a via recta momentis ſingulis declinet, *curua* erit linea, quam percurret.

274. Coroll. 2. Adparet ergo lineam rectam eſſe omnium breuiſſimam, quae inter duo puncta duci poſſunt, et hinc aptiſſime exhibere eorundem inter ſe diſtantiam.

275. Coroll. 3. Non minus perſpicuum eſt data duo puncta poſitione ſua lineae rectae ſitum determinare; adeoque ab vno puncto ad aliud nonniſi vnicam rectam duci poſſe.

276. Coroll. 4. Denique non poſſe duas rectas ſe interſecare niſi in vnico puncto; ſecus haberent duo puncta communia, adeoque congruerent, nec eſſent duae, ſed vnica linea (275).

277. Si linea recta AB circa medium ſui punctum immotum conuertatur relicto in ſitu AB ſui veſtigio, cum ad quamcunque aliam poſitionem *ab* deuenerit, inclinabitur ad ſitum priſtinum AB in punctis *o*, et *x*, quae duarum rectarum ad ſeſe inclinatio *angulus* nuncupatur; cuius magnitudo non a laterum CA et C*a* quantitate, ſed a ſola eorundem diuaricatione pendet. Fig. 3.

278. Coroll. Duo anguli AC*a*, *a*CB, quos recta *a*C alteri AB inſiſtens vtrinque facit, vocantur *contigui*, vel *deinceps poſiti*: anguli autem *o* et *x*, vel anguli *a*CB, AC*b*, quos rectae AB et *ab* ſe in C interſecantes verſus plagas oppoſitas efficiunt, *verticales*, aut ad *verticem oppoſiti* adpellantur.

279. Quum peracta dimidia conuerſione punctum A peruenerit ad locum B, et punctum B ad locum A, recta mobilis AB verret interea ſpatium linea curua continua A*a*Bβ A concluſum, quod *circulus* dicitur, ipſa autem illa curua eiuſ

dem *peripheria*, punctum conuerſionis C *centrum*. pars quaeuis peripheriae A*a*, vel $\alpha$B *arcus*, recta AB *diameter*, eius dimidium CA vel CB *ſemidiameter*, vel *radius*; generatim omnes rectae, quarum extrema in peripheria terminantur, *chordae*, vel *ſubtenſae*, ſpatium arcu et chorda comprehenſum *ſegmentum*, ſpatium duobus radiis et arcu concluſum *ſector* circuli nominatur.

286. Coroll. 1. Dum ea conuerſione circulus gignitur, eadem recta AB circa centrum C reuolui, adeoque omnes poſitiones *ab*, $\alpha\beta$ etc. ſucceſſiue obtinere concipitur: palam ergo eſt in eodem circulo omnes diametros ac proinde etiam omnes radios aequales eſſe: et hinc omnia puncta peripheriae a centro aeque diſtare (274).

281. Coroll. 2. Circuli aequales ſibi debite impoſiti perfecte congruunt, et inſtar vnius haberi poſſunt: congruunt ergo etiam eorum radii, et diametri; quare in circulis aequalibus radii, ac diametri aequales ſunt.

Scholion. Circuli cuiuſuis peripheria diuidi ſolet in 360 aequales partes, quae *gradus* adpellantur: gradus item ſinguli in 60 *minuta prima*, ac horum quoduis in 60 *minuta ſecunda*, et ſic porro. Partes autem iſtae breuitatis cauſſa hunc in modum ſcribuntur: 36°, 48′, 5″, 12‴ etc. id eſt, 36 gradus, 48 minuta prima, 5 ſecunda, 12 tertia etc.

282. Dum recta mobilis AB receſſit ad ſitum *ab*, patet angulum *o*, vel *x* tanto maiorem, vel

minorem fieri, quanto magis, vel minus recedit recta illa mobilis a ſitu AB, et hinc quantitatem huius receſſus recte aſſumi pro menſura anguli; quantitas porro huius receſſus coaleſcit ex ſumma progreſſuum momentaneorum, quos lineae mobilis quoduis punctum facit, quae ſumma rite exhibetur per arcum e vertice anguli tanquam centro inter anguli crura deſcriptum: ergo menſura anguli eſt eiuſmodi arcus, cuius graduum numerus quantitatem anguli determinat.

283. Coroll. Omnes arcus A*a*, D*d* ex eodem anguli vertice intra eiuſdem latera deſcripti totidem gradus continent, ac proinde pro anguli menſura aſſumi poſſunt. Si enim peripheria circuli maioris concipiatur diuiſa in quotcunque partes aequales A*a*, $a\alpha$ ductis a centro radiis C*a*, C$\alpha$, iidem radii etiam peripheriam circuli minoris ſecabunt in totidem partes aequales D*d*, $d\delta$: nam ſi ſector AC*a* circa radium C*a* conuertatur, arcus A*a* congruet cum aequali $a\alpha$; ergo etiam arcus D*d* congruet cum $d\delta$, et dum arcus A*a* percurſa tota peripheria redibit ad ſitum priſtinum A*a*, etiam arcus D*d* redibit ad ſitum D*d*: hinc quoties arcus A*a* continetur in peripheria circuli maioris, ſeu in gradibus 360, toties etiam continetur arcus D*d* in peripheria circuli minoris, ſeu in gradibus 360, ac proinde ambo totidem numero gradus tametſi magnitudine inaequales continent.

284. Quando recta mobilis AB obtinet ſitum $\alpha\beta$, in quo ad neutram partem magis inclinatur, vocatur $\alpha\beta$ reſpectu AB *perpendicularis*; et an-

guli AC$\alpha$, BC$\alpha$, quos vtrinque facit, adpellantur *recti*; angulus AC*a* recto minor *acutus*, angulus *a*CB recto maior *obtuſus* audit.

285. Coroll. 1. Recta $\alpha\beta$ in vnico illo ſitu ad neutram partem propendet: hinc ad rectam AB ex eodem puncto C nequit in eadem ſuperficie erigi niſi vnica perpendicularis.

286. Coroll. 2. Dum recta mobilis ad ſitum perpendicularem peruenit, eius extremum A deſcribit quadrantem circuli A$\alpha$, ſeu 90°: ergo angulus rectus eſt 90° (282): adeoque angulus acutus minor, obtuſus maior eſt 90 gradibus.

Scholion. In hiſce principiis tota innititur geometria, quibus addimus nonnulla axiomata, quorum vſum et in algebra iam habuimus, et porro habebimus in ſequentibus. 1) Quae eidem aequalia ſunt, etiam inter ſe aequalia ſunt: et quod vno aequalium maius, aut minus eſt, etiam altero maius, aut minus eſt. 2) Si aequalibus idem, vel aequalia addas, aut demas, manebunt aequalia. Sin autem inaequalibus addas, aut demas aequalia, manebunt, vt ante, inaequalia. 3) Si duae quantitates tertiam quampiam praeciſe totidem vicibus contineant, vel in eadem contineantur, aequales ſunt: hinc aequalia manent aequalia, ſi per eandem quantitatem multiplicentur, aut diuidantur. 4) Duae quantitates, quae ſibi impoſitae perfecte congruunt, aequales ſunt; et contra. 5) Totum aequatur omnibus ſuis partibus ſimul, maius autem eſt ſingulis. His

His accedunt quaedam poſtulata, quae fieri poſſe nemo non videt. 1) Ab vno puncto dato ad aliud datum poſſe duci lineam rectam. 2) Rectam quamuis poſſe vtrinque indefinite produci. 3) Per datum punctum poſſe duci rectam, quae a data recta vbique aequaliter diſtet. 3) E dato rectae puncto poſſe erigi, vel e dato extra rectam puncto poſſe demitti lineam perpendicularem. 5) Quamuis rectam finitam poſſe in duas aequales partes diuidi.

# SECTIO I.

## DE LINEIS ET ANGULIS.

## CAPVT I.

### *De lineis rectis ad ſe inuicem comparatis.*

Fig. 4. 287. THEOREMA. *Anguli contigui* o, *et m quos recta* CD *alteri* AB *inſiſtens vtrinque facit, ſimul continent* 180°, *ac proinde aequiualent duobus rectis.*

DEMONSTR. Si enim e communi angulorum vertice tanquam centro deſcribatur ſupra rectam AB ſemiperipheria circuli ACB, angulum *o* menſurabit arcus AC, angulum *m* arcus CB (282), ſed $AC + CB = 180°$: ergo etiam $o + m = 180°$.

288. COROLL. I. Eodem modo patet eſſe $o + n = 180°$, $n + x = 180°$, $x + m = 180°$.

289. COROLL. 2. Si ergo angulus *o* rectus eſt, tres etiam reliquos rectos eſſe oportebit. Si *o* acutus eſt, angulum contiguum *m* obtuſum eſſe; ſi *o* obtuſus eſt, eundem angulum *m* acutum eſſe neceſſe eſt (284).

290. COROLL. 3. Si duo quiuis anguli contigui in partes quotcunque diuidantur, perſpicuum eſt, omnes illos ſimul continere 180°; ſemper enim menſurabuntur ſemiperipheria circuli.

291. COROLL. 4. Omnes anguli *o*, *m*, *x*, *n*, qui circa idem punctum fieri poſſunt, ſimul continent 360°, ſeu aequiualent quatuor rectis; ſemper enim menſurabuntur integra peripheria circuli.

292. THEOREMA. *Si recta* CD *alteram* AB *ſecet, anguli verticales* o *et* x, *item* m *et* n *aequales erunt.*

DEMONSTR. Nam $o + m = 180°$: et $x + m = 180°$ (287): ergo etiam $o + m = x + m$; quare tollendo ab aequalibus idem *m*, erit $o = x$. Eodem modo oſtenditur eſſe $m = n$.

293. COROLL. Si ergo e quatuor illis angulis vnus quiſpiam innoteſcat, ceteri eo ipſo innoteſcunt. E. g. ſi notus ſit angulus *o*, notus hoc ipſo erit eiuſdem verticalis *x*; et ſi *o* a 180° tollatur, innoteſcet angulus *m*, et eius verticalis *n*.

294. THEOREMA. *Si recta* AC *ita inſiſtat alteri* GF, *vt duo eiusdem puncta quaecunque* A *et* C *aequaliter diſtent a duobus alterius punctis* G *et* F, *erit hoc ipſo illa ad hanc, ſeu* AC *ad* GF *perpendicularis.* Fig. 5.

DEMONSTR. Nam ex hypotheſi puncta A et C aequaliter diſtant a punctis G, et F; ſed duo

puncta determinant ſitum rectae AC (275); ergo omnia rectae AC puncta indidem aequaliter diſtant, ac proinde recta AC in neutram partem magis inclinatur; eſt adeo perpendicularis (284).

295. Coroll. 1. Quoniam anguli *m* et *n* recti ſunt (cit.), erunt etiam anguli *o* et C recti (287): ergo etiam pars producta CE erit ad GF perpendicularis (274).

296. Coroll. 2. Et quia anguli *m* et *o*, item *n* et C recti ſunt; ſi recta AE eſt perpendicularis ad GF, erit haec viciſſim perpendicularis ad AE (cit.).

297. Theorema. *Si recta* AE *perpendicularis ſit ad* GF, *et habeat quodcunque punctum* C *aequaliter diſtans a duobus alterius punctis* B *et* D, *omnia eius puncta indidem hoc ipſo aequaliter diſtabunt.*

Demonstr. Si enim aliquod eius punctum e. g. A non aequaliter diſtaret a punctis B, et D, recta AC in loco A non haberet eandem inclinationem verſus B et D, quam habet in loco C, ac proinde contra hypotheſim non eſſet perpendicularis.

298. Theorema. *Si e puncto* A *ad rectam* GF *ducantur quotcunque lineae* AG, AB, AC *etc. et* AC *ſit perpendicularis, erit ea omnium illarum breuiſſima.*

Demonstr. Producatur AC in E, ita vt CE fiat = AC, et ducantur rectae EG, EB. Cum ex hypotheſi AE ſit perpendicularis ad GF, erit viciſſim GF ad AE perpendicularis (296), habetque ex conſtr. punctum C aequaliter diſtans a punctis A et E; ergo omnia eius puncta, adeo-

que etiam puncta G et B indidem aequaliter diſtant ( 297 ), ſeu $AG = EG$, et $AB = EB$. Iam $AG + EG$, item $AB + EB > AE$ ( 274 ): ergo etiam $\frac{AG + EG}{2}$, item $\frac{AB + EB}{2} > \frac{AE}{2}$; ſed $\frac{AG + EG}{2} = AG$, $\frac{AB + EB}{2} = AB$, $\frac{AE}{2} = AC$: ergo AG item $AB > AC$: ergo AC eſt omnium breuiſſima.

299. Coroll. 1. Igitur e dato puncto A ad eandem rectam GF nonniſi vnica perpendicularis duci poteſt, cum repugnet plures eſſe breuiſſimas.

300. Coroll. 2. Si recta AC fuerit breuiſſima omnium rectarum, quae ex puncto A ad eandem rectam GF duci poſſunt, eſt hoc ipſo perpendicularis: alias duci poſſet alia quaepiam perpendicularis e. g. AB, quae etiam eſſet breuiſſima ( 298 ), quod abſurdum eſt.

301. Coroll. 3. Cum diſtantia puncti A a data recta GF debeat eſſe fixa, et determinata, eam legitime metimur ope perpendicularis AC, quae ſemper eſt vnica ( 299 ), adeoque fixa.

302. Coroll. 4. Si recta EF in vnico puncto A occurrat circulo, ſeu ſi circulum tangat, erit radius CA ad eam perpendicularis. Si enim recta EF tangit circulum in vnico puncto A, vnicum illud punctum habet in peripheria circuli, et cetera omnia eius puncta B, D etc. ſunt extra circuli peripheriam: ergo punctum A eſt omnium eius punctorum centro C viciniſſi- Fig. 6.

mum; ergo recta CA eſt omnium CB, CD etc. breuiſſima, adeoque perpendicularis (300).

303. Coroll. 5. Et viciſſim, ſi radius CA ad rectam EF perpendicularis ſit, tangit EF circulum in A. Nam ex hypotheſi CA eſt perpendicularis: ergo eſt omnium CB, CD etc. breuiſſima (298), ergo punctum A eſt omnium B, D etc. centro C viciniſſimum; atqui punctum A eſt in peripheria circuli; ergo cetera omnia B, D etc. ſunt extra peripheriam; hinc rectae EF vnicum punctum A eſt in peripheria, cetera ſunt extra: ergo circulum in A tangit.

Fig. 7. 304. Problema. *Rectam finitam* AB *in duas aequales partes perpendiculariter ſecare.*

Resolut. E punctis extremis A et B tanquam centris deſcribantur arcus C et D, ac eorum interſectiones iungantur recta CD; haec datam rectam bifariam et perpendiculariter ſecabit in puncto I.

Demonstr. Cum enim ex conſtructione ductae rectae CB, CA, DB, DA ſint radii aequalium circulorum, ſunt aequales inter ſe (281), adeoque rectae CD duo puncta C et D aequaliter diſtant a punctis A et B (274): eſt ergo recta CD ad AB perpendicularis (294), et omnia eius puncta (297), adeoque etiam punctum I aequaliter diſtat a punctis A et B, hoc eſt, AI = IB.

Fig. 8. 305. Problema. *E dato rectae* AD *puncto* I *perpendicularem erigere.*

Resolut. Capiantur circino ex puncto I ſegmenta IO, IE aequalia; deinde centris O et E apertura circini vltra I deſcribantur arcus ſeſe in

puncto C interſecantes, erit recta CI quaeſita perpendicularis.

Demonstr. Nam ex conſtr. punctum I aequaliter diſtat a punctis O et E; et ob radios OC et EC aequales, etiam punctum C indidem aequaliter diſtat: ergo recta CI ad AD perpendicularis eſt (294).

306. Problema. *E dato extra rectam AD puncto C perpendicularem ad eandem demittere.*

Resolut. Poſito crure circini in dato puncto C deſcribatur arcus OE ſecans datam rectam in punctis O et E: tum ex iis tanquam centris circino vltra dimidium rectae OE aperto ducantur arcus ſeſe interſecantes in puncto F, erit recta CI per puncta C et F ducta quaeſita perpendicularis.

Demonstr. Patet enim, vt ante, puncta C et F aequaliter diſtare a punctis O et E.

Scholion. In campo circini loco adhiberi ſolet catena, vel funis circa clauum fixum mobilis, et altero extremo ſtylo ferreo inſtructus, qui ad funem tenſum debet eſſe perpendicularis. Ne vero funis humore imbutus inaequaliter tendatur, funiculi, e quibus conſit, debent contorqueri in gyros contrarios, funis autem ipſe oleo bullienti immergi, et quum exſiccatus fuerit, per liquatam ceram traduci.

307. Rectae AB et CD, quae a ſe vbique aequaliter diſtant, etſiamſi infinite producantur, *parallelae* vocantur. Fig. 9.

308. Coroll. Quare perpendicula inter duas parallelas intercepta inter ſe aequalia ſunt: metiuntur enim earum inter ſe diſtantias (301).

309. THEOREMA. *Si duas parallelas* AB *et* CD *ſecet recta quaepiam* EF, *anguli* x internus *et* o externus *ad eandem partem aequales ſunt.*

DEMONSTR. Concipiatur enim primum recta CD rectae AC impoſita eſſe, ita vt anguli $x$ et $o$ congruant: tum ceteris immotis eadem CD ſitu conſtanter parallelo ſenſim deſcendere; euidens eſt eundem angulum $x$, qui ante cum angulo $o$ congruebat, penes lineam EF deſcenſurum eſſe, ac proinde angulo $o$ vbique aequalem fore. Nam ſicubi angulus $x$ maior, aut minor fieret, ibi neceſſe eſſet rectam CD ad AB inclinari, et proinde a ſitu parallelo deflectere. Eodem modo patet eſſe $n = r$, $y = s$, $m = t$.

310. COROLL. 1. Si ergo angulus $o$ rectus eſt, rectum etiam eſſe oportebit angulum $x$: quare recta vni parallelarum perpendicularis, eſt alteri quoque perpendicularis (284).

311. COROLL. 2. Quoniam $o = x$ (309), et idem $o = y$ (292), erit $x = y$: id eſt, ſi duae parallelae a tertia recta ſecentur, anguli *alterni* aequales ſunt. Eodem modo patet eſſe $m = n$.

312. COROLL. 3. Cum ſit $m + y = 180°$ (288), et $y = x$ (311), erit $m + x = 180°$: id eſt anguli *interni* ad eandem partem ſimul aequantur duobus rectis. Eadem ratione oſtenditur eſſe $y + n = 180°$.

Fig. 10. 313. THEOREMA. *Viciſſim ſi duae rectae* AB *et* CD *a tertia quapiam* EF *ſectae faciant vel* 1) *angulos internum* x, *et externum* o *aequales, vel* 2) *angulos alternos* y *et* x *aequales, vel* 3)

*duos internos* m *et* x *ſimul duobus rectis aequales, rectae* AB *et* CD *parallelae ſunt.*

DEMONSTR. Sit enim 1) $o = x$; ſi AB non eſſet parallela rectae CD, poſſet eidem per punctum $o$ duci alia quaepiam parallela $ab$, et tunc eſſet $o + r = x$ (309): ſed etiam ponitur $o = x$: ergo eſſet $o + r = o$, quod abſurdum eſt. Eadem eſt demonſtratio ſi $a\,b$ alium quemcunque ſitum habeat. Ergo nulla alia praeter AB poteſt duci per punctum $o$ parallela, ac proinde AB parallela eſt.

2) Si ponatur $y = x$, cum etiam ſit $y = o$ (292) erit $o = x$, et hinc per demonſtrata AB eſt parallela rectae CD.

3) Si ponatur $m + x = 180°$, cum ſit etiam $m + o = 180°$ (287) erit $x = o$, hinc rurſus AB et CD, vt ante, parallelae ſunt.

314. COROLL. 1. Demonſtratione praeſentis theorematis id quoque euidenter efficitur, eidem rectae CD per idem punctum $o$ non poſſe duci niſi vnicam parallelam.

315. COROLL. 2. Ex eadem patent diuerſi modi datae rectae per datum punctum parallelam ducendi. Nos commodiſſimum infra proferemus.

316. COROLL. 3. Si rectae AB et CD parallelae fuerint eidem tertiae GH, erit $o = z$ et $x = z$ (309), ac hinc $o = x$: adeoque eaedem rectae etiam inter ſe parallelae erunt (313). Aut ſi rectae AB et GH fuerint parallelae mediae cuidam lineae CD, erit $o = x$, et $z = x$: hinc $o = z$, adeoque eaedem rectae etiam inter ſe parallelae erunt. Fig. 9.

P 5

# CAPVT II.

## *De lineis rectis ad circulum relatis.*

317. THEOREMA. *Chordae aequales in eodem circulo aequales arcus ſubtendunt, ita ſcilicet, vt cum quaeuis chorda binos vtrinque ſubtendat arcus, bini minores aequentur inter ſe, et bini maiores inter ſe.*

Fig. 11. DEMONSTR. Cogitetur tota figura rectilinea ACB manente eodem angulo ACB circa centrum C conuerti, donec perueniat ad ſitum *a*C*b*: congruet illic chorda AB cum ſibi aequali *ab*, et hinc congruent extrema puncta arcuum AB et *ab*, item arcuum A*ba*B et *a*BA*b*; quare et arcus ipſi congruent: hinc ergo arcus AB erit $=$ *ab*, item arcus A*ba*B $=$ *a*BA*b* (282): chordae ergo aequales arcus aequales ſubtendunt.

318. COROLL. 1. Quia perpendicularis C*d* eadem, ac proinde aequalis eſt perpendiculari CD, metiturque diſtantiam chordae a centro (301), patet chordas aequales in eodem circulo a centro aeque diſtare.

319. COROLL. 2. Chordae ergo inaequales in eodem circulo ſubtendunt inaequales arcus, et inaequaliter diſtant a centro; nimirum maioribus chordis maior arcus et minor diſtantia reſpondet.

320. COROLL. 3. Viciſſim arcubus aequalibus aequales chordae; maioribus maiores; mi-

noribus minores reſpondent. Et chordae a centro aeque diſtantes aequales; magis diſtantes minores; minus diſtantes maiores ſunt: adeoque diameter chordarum omnium maxima eſt.

321. Coroll. 4. Quoniam duo circuli aequales ſibi impoſiti congruunt, et inſtar vnius haberi poſſunt, praeſens theorema cum ſuis corollariis etiam ad circulos aequales pertinet.

322. Theorema. *Si per chordam* AB *diametro minorem ducatur recta* GD, *et adſint duo quaeuis ex hiſce quinque,* 1) *quod recta* GD *per centrum tranſeat,* 2) *quod ad chordam perpendicularis ſit,* 3) *quod eandem in* E *bifariam ſecet,* 4) *quod arcum* ADB *in* D, *aut* 5) *angulum* ACB *bifariam ſecet, ſemper aderunt reliqua tria.* Fig. 12.

Demonstr. 1) Tranſeat recta GD per centrum, et ſit ad chordam perpendicularis, habet hoc ipſo vnum punctum C a punctis A et B aequaliter diſtans (280): ergo etiam puncta E et D indidem aequaliter diſtant (297); hinc AE = EB, et chorda AD = DB, adeoque arcus AD = DB (317), et angulus $m = n$ (282).

2) Sit GD ad chordam perpendicularis, eamque in E bifariam ſecet, erit vt ante arcus AD = DE, angulus $m = n$: et quia etiam AG = GB, cum aequales angulos, nempe angulorum $m$ et $n$ contiguos menſurent (282), erit DA + AG = DB + BG: quare GD diameter eſt, et conſequenter per centrum tranſit.

3) Tranſeat recta GD per centrum, et bifariam ſecet chordam, vel arcum, vel angulum

C, habebit in quouis caſu duo puncta aequaliter diſtantia ab A et B, vnde cetera omnia ſponte conſequuntur. Eodem modo patent cetera, ſi recta GD chordam, et arcum, vel angulum bifariam ſecet.

Fig. 13. 323. PROBLEMA. *Ducere circulum per data tria puncta* A, B, D *non in directum ſita.*

RESOLUT. Iungantur data puncta rectis AB et BD, quae bifariam ſecentur per rectas EF et GH perpendiculares (304), earum communis interſectio C erit centrum circuli per data tria puncta tranſeuntis.

DEMONSTR. Cum enim rectae AB et BD ſint chordae quaeſiti circuli (279), perpendiculares EF et GH ambae per eius centrum tranſeunt (322); atqui ſolum punctum C eſt, per quod ambae tranſeunt (276): ergo punctum C eſt centrum.

324. COROLL. 1. Eodem res redit, ſi datus arcus ABD continuandus, vel dati circuli centrum inueniendum, vel dato triangulo circulus circumſcribendus ſit.

325. COROLL. 2. Centrum C in infinitum recedet, nec vſquam iam erit, ſi data tria puncta in directum iaceant: hinc recta, quae puncta illa iungit, quodammodo aequiualebit arcui circuli infinite magni.

326. COROLL. 3. Quoniam datis tribus punctis nonniſi vnicum inuenitur centrum circuli per ea tranſeuntis, ſi duorum circulorum tria peripheriae puncta congruant, congruent reliqua omnia. Hinc duo circuli nequeunt ſibi in tribus punctis occurrere.

327. PROBLEMA. *Datum arcum* AB *in duas partes aequales diuidere.* Fig. 14.

RESOLUT. Ducatur chorda AB, et haec per rectam ED ſecetur bifariam (304): diuidet ea arcum in duas aequales partes (322).

328. COROLL. Si angulus C bifariam ſecandus ſit, ducatur ex eius vertice tanquam centro inter duo latera arcus AB, fiatque centris A et B interſectio duorum arcuum in D, recta per verticem C et punctum D ducta diuidet arcum AB, adeoque etiam angulum C in duas partes: erit enim recta CD ad chordam AB perpendicularis (294), et per centrum C tranſibit (322).

329. THEOREMA. *Si ex eodem puncto* A *extra circuli centrum aſſumto ducantur quotcunque rectae* AB, AD, AE *ad partem peripheriae concauam, omnium maxima erit* AB, *quae per centrum* C *tranſit; ceterae eo minores, quo magis receſſerint a recta per centrum tranſeunte.* Fig. 15.

DEMONSTR. Ductis enim radiis CD, CE, erit AB = AC + CD > AD; item AC + CE = AB > AE (274): eſt ergo AB omnium maxima. Deinde CF + FD > CD > CE; igitur vtrinque tollendo idem CF, erit FD > FE: ergo vtrique addendo AF, erit AF + FD, ſeu AD > AF + FE: cumque AF + FE ſit > AE, a potiori AD > AE.

330. COROLL. 1. Quoniam inter eiusmodi rectas tangens AT maxime recedit ab AB, erit ea omnium minima.

etiam $Or + rA$, ſeu $OA > KA$. Si vero punctum A ſit extra circulum, erit $AK + KC > AC$, et ablatis vtrinque aequalibus KC, et GC, erit $AK > AG$. Similiter $AO + OC > AK + KC$: ergo etiam ablatis aequalibus OC, et KC, erit $AO > AK$.

336. Coroll. 1. Eodem, quo ſupra vſi fuimus, ratiocinandi genere ex hoc theoremate concludere licebit ſequentia. 1) Tangentem AT omnium huiusmodi rectarum maximam eſſe. 2) Si recta AG ſit omnium minima, eam productam per centrum tranſire. 3) Quae earum maiores ſunt, magis ab AG recedere. 4) Quae aequaliter recedunt, aequales eſſe, et contra. 5) Non poſſe ex eodem puncto A, quod non ſit centrum, tres rectas aequales duci ad circuli peripheriam.

337. Coroll. 2. Si ergo duo circuli ſe exterius, vel interius tangant in puncto B, recta AB ex centro vnius A ad punctum contactus B ducta tranſibit per centrum alterius C. Cum enim circuli ſe tangant in vnico puncto B, recta AB eſt minima omnium, quae ex centro A ad alterius circuli peripheriam duci poſſunt: quare tranſibit per eius centrum C (336) Fig. 16.

338. Coroll. 3. Itaque centra duorum circulorum ſe contingentium, et punctum contactus iacent in eadem recta.

339. Coroll. 4. Hinc punctum contactus B facile determinatur, ſi centra circulorum A et C per rectam AC productam, ſi neceſſe fuerit, connectantur.

Fig. 17. 340. THEOREMA. *Angulus* ATB, *qui ſit in peripheria circuli a tangente* AT, *et chorda* TB, *habet pro menſura dimidium arcus* TDB *ab eadem chorda ſubtenſi.*

DEMONSTR. Ductis enim diametris D$d$, et E$e$, quarum prior ſit chordae TB perpendicularis, poſterior parallela, ac ducto radio CT, erit angulus $o + x = 90°$ (302), et $n + y = 90°$ (310): ergo $o + x = n + y$, et vtrinque tollendo $x$ et $y$ aequales (311) erit $o = n$; atqui $n$ habet pro menſura arcum TD (282), qui eſt pars dimidia arcus TDB (322); ergo etiam $o$, ſeu angulus ATB eandem menſuram habet.

341. COROLL. Quoniam menſura angulorum ATB + BT$a$ eſt ſemiperipheria DT$d$ (287), et per demonſtr. anguli ATB menſura eſt arcus TD, erit anguli BT$a$ menſura arcus TD, hoc eſt, dimidium arcus T$d$B a chorda TB ex ea parte ſubtenſi (322).

Fig. 18. 342. THEOREMA. *Angulus* x, *quem in peripheria circuli duae chordae* TB *et* TD *comprehendunt, habet pro menſura dimidium arcus* BD, *cui eiusdem crura inſiſtunt.*

DEMONSTR. Si enim concipiatur ducta tangens A$a$, anguli $o + x + n$ habent pro menſura ſemiperipheriam circuli (290), ſeu arcus $\frac{1}{2}$ TB + $\frac{1}{2}$ BD + $\frac{1}{2}$ DT; atqui $o$ habet pro ſua menſura $\frac{1}{2}$ TB, et $n$ habet $\frac{1}{2}$ DT (340): ergo pro $x$ manet $\frac{1}{2}$ BD.

343. COROLL. I. Angulus ad centrum C duplus eſt anguli $x$ ad peripheriam eidem arcui

cui BD inſiſtentis. Nam anguli C menſura eſt totus arcus BD (282); anguli $x$ eſt $\frac{1}{2}$ BD (342).

344. Coroll. 2. Si anguli quotcunque ad peripheriam ſiti eidem arcui inſiſtant, omnes inter ſe aequales ſunt: quemlibet enim menſurat dimidium eiusdem arcus (342).

345. Coroll. 3. Si angulus ad peripheriam verticem habeat in ſemicirculo, cruribus inſiſtit alteri ſemicirculo, adeoque pro menſura habet dimidiam ſemiperipheriam, conſequenter rectus eſt. Si verticem habeat in ſegmento maiori, cruribus inſiſtit ſegmento minori; et ſi verticem habeat in ſegmento minori, cruribus inſiſtit ſegmento maiori, quam ſit ſemicirculus: vnde in primo caſu pro menſura habet minus, in ſecundo plus quam dimidiam ſemiperipheriam: ergo in primo acutus, in ſecundo obtuſus eſt (284).

346. Coroll. 4. In quauis figura quadrilatera circulo inſcripta TBFD anguli oppoſiti T et F, item B et D ſimul habent 180°. Nam ambo ſimul inſiſtunt toti peripheriae, adeoque pro menſura habent ſemiperipheriam (342).

347. Coroll. 5. Chordae parallelae AB et CD aequales arcus intercipiunt in eodem circulo. Ducta enim recta BC anguli $o$ et $x$ aequales erunt (311): ergo etiam eorum menſurae, ſeu dimidii arcus AC et BD (342), adeoque et integri inter ſe aequales erunt. Viciſſim ſi arcus hi aequales ſunt, aequantur etiam eorum dimidia, ac proinde et anguli $o$ et $x$, quos ea menſurant; et hinc chordae parallelae ſunt (313). Fig. 19.

348. Coroll. 6. Chorda CD, et tangens EF inter ſe parallelae aequales arcus intercipiunt. Ducta enim recta DG anguli $x$ et $y$ aequabuntur vt ante; adeoque etiam dimidii arcus CG, DG eoſdem menſurantes (340, 342) ac ipſi quoque integri aequales erunt. Viciſſim ſi arcus hi aequales ſint, chordam, et tangentem fore inter ſe parallelas demonſtratur, vt ante.

Fig. 20. 349. Problema. *Datae rectae* AB *per datum, vel aſſumtum punctum* G *parallelam ducere.*

Resolut. Infixo crure circini in dato puncto G deſcribatur ad libitum arcus indefinitus CF, ac centro F eodem radio FG arcus GE; interuallo GE ex arcu CF reſecetur ſegmentum FD, recta per puncta G et D ducta erit parallela petita. Nam arcus GE, et DF aequales habent ex conſtr. chordas, ac proinde et ipſi aequales ſunt (321): quare angulus $o = x$ (282), adeoque rectae AB et GD parallelae ſunt (313).

Fig. 21. 350. Problema. *In datae rectae* AB *extremo puncto* B *perpendicularem erigere.*

Resolut. Aſſumto ſupra datam rectam vbicunque centro C, radio CB deſcribatur circulus occurrens rectae datae, et ſi neceſſe ſit productae in A: deinde ex A per centrum C ducatur diameter AD: et puncta B et D connectantur linea DB, erit ea perpendicularis petita. Erit enim angulus ABD rectus (345).

Fig. 22. 351. Problema. *Ad datum in peripheria circuli punctum* B *tangentem ducere.*

Resolut. Ducatur ad datum punctum radius CB, ac in eius extremo B erigatur per-

pendicularis BA (350); erit AB tangens petita (303).

352. PROBLEMA. *E dato puncto* A *tangentem ad circulum ducere.*

RESOLUT. Connectatur datum punctum cum centro C per rectam AC, ſupra quam tanquam diametrum deſcriptus ſemicirculus occurret dato circulo alicubi in B: connectantur ergo puncta A et B per rectam AB, erit ea tangens petita. Nam ducto radio CB angulus ABC rectus erit (345), et hinc AB tangens (303).

353. THEOREMA. *Angulus* ATB, *qui in peripheria ſit a chorda* TB, *et alia recta* AT, *quae producta ſecat circulum, habet pro menſura ſemiſummam arcuum a latere* TB, *et* AT *producto ſubtenſorum.* Fig. 23.

DEMONSTR. Nam anguli ATB + BTD habent pro menſura ſemiperipheriam, ſeu arcus $\frac{1}{2}$ TB + $\frac{1}{2}$ BD + $\frac{1}{2}$ DT (287); ſed angulus BTD ſibi vendicat arcum $\frac{1}{2}$ BD (342): ergo pro angulo ATB remanet $\frac{1}{2}$ TB + $\frac{1}{2}$ DT.

354. THEOREMA. *Angulus* x, *cuius vertex eſt intra circuli peripheriam extra centrum, habet pro menſura ſemiſummam arcuum* DB *et* CE *a lateribus productis interceptorum.* Fig. 24

DEMONSTR. Ducta enim EF lateri CB parallela erit angulus $x = o$ (309); atqui angulus $o$ habet pro menſura arcum $\frac{1}{2}$ DB + $\frac{1}{2}$ BF (342), ſeu ob arcum BF = CE (347) arcum $\frac{1}{2}$ DB + $\frac{1}{2}$ CE: ergo et angulus $x$.

355. COROLL. Eodem modo patet angulum DAC habere pro menſura arcum $\frac{1}{2}$ DC + $\frac{1}{2}$ BE; nam anguli A et $x$ ſimul habent pro menſura ar-

cus $\frac{1}{2}$ DC + $\frac{1}{2}$ DB + $\frac{1}{2}$ BE + $\frac{1}{2}$ CE (287); atqui $x$ ſibi vendicat arcum $\frac{1}{2}$ DB + $\frac{1}{2}$ CE (354):
Fig. 25. ergo pro angulo DAC remanet $\frac{1}{2}$ DC + $\frac{1}{2}$ BE.

356. THEOREMA. *Angulus* DAB, *cuius vertex eſt extra circuli peripheriam, habet pro menſura ſemidifferentiam arcuum* DB *et* CE *a lateribus interceptorum.*

DEMONSTR. Ducta enim CF lateri AB parallela, erit angulus BAD = FCD (309); atqui angulus FCD habet pro menſura arcum $\frac{1}{2}$ DF (342): ergo et angulus BAD. Eſt autem DF = DB — FB = DB — CE (347): ergo aequalia diuidendo per 2, $\frac{1}{2}$ DF = $\frac{1}{2}$ DB — $\frac{1}{2}$ CE.

357. COROLL. Si latus AB circa punctum A moueatur, donec veniat ad ſitum A$b$, et euadat tangens, arcus CE abibit in CN, arcus DB in DN, punctis E et B in N coeuntibus: quare angulus $b$AD habebit pro menſura ſemidifferentiam arcuum DN et CN. Si etiam latus alterum A$d$ euadat tangens, arcus CN abibit in MCN, et arcus DN in MDN: igitur angulus $b$A$d$ habebit pro menſura ſemidifferentiam arcuum MDN et MCN.

SCHOLION. Ex his adparet angulum vbi demum cunque ſitum innoteſcere, ſi producta eiuſdem crura peripheriae circuli in datis punctis occurrant. Adparet item angulum, cuius menſura eſt dimidium arcus a lateribus intercepti, habere verticem in peripheria eius circuli, ad quem arcus ille pertinet: verticem anguli, cuius menſura maior eſt, intra peripheriam eſſe extra centrum: anguli denique, cuius menſura minor eſt, verticem extra peripheriam conſiſtere.

# CAPVT III.

## *De lineis rectis quatenus ſpatium claudunt.*

358. E notione lineae rectae facile intelligitur ad ſpatium aliquod claudendum tribus minimum rectis opus eſſe. Spatium lineis clauſum *figura*, vel *polygonum* adpellatur, cuius *latera* ſunt ipſae illae lineae. Speciatim autem *trigonum*, ſeu *triangulum* dicitur ſpatium, quod tribus; *tetragonum*, ſeu *quadrilaterum*, quod quatuor: *pentagonum*, quod quinque; *hexagonum*, quod ſex etc. leteribus, ac angulis terminatur. Porro hae figurae *regulares* ſunt, ſi omnia latera, et angulos aequales habeant: ſecus *irregulares* dicuntur.

359. Triangulum dicitur *aequilaterum*, ſi omnia tria latera habeat inter ſe aequalia: *iſoſceles*, ſeu *aequicrurum*, ſi duo; *ſcalenum* vero, ſi omnia tria latera ſint inaequalia. Item *rectangulum* triangulum eſt, quod habet vnum angulum rectum, cui oppoſitum latus *hypotenuſa*; latera autem angulum ipſum rectum efficientia *catheti* nuncupantur. Denique triangula adpellantur *ſimilia*, ſi ſinguli anguli vnius aequentur ſingulis alterius; latera vero eorum angulis aequalibus oppoſita *homologa* audiunt.

360. THEOREMA. *In quouis triangulo tres anguli ſimul continent 180°, ſeu aequiualent duobus rectis.*

Fig. 26. DEMONSTR. Poteſt enim per cuiusuis trianguli vertices duci, ſeu circumſcribi circulus (324), et tunc tres angulos A, B, C menſurabunt dimidia trium arcuum BC, CA, AB (342), adeoque ſemiperipheria, ſeu 180°.

361. COROLL. 1. Nequit ergo in triangulo eſſe angulus rectus, aut obtuſus niſi vnicus, et tunc reliqui duo hoc ipſo acuti ſunt, ſecus tres anguli ſimul haberent plus quam 180°.

362. COROLL. 2. In quouis triangulo rectangulo duo anguli acuti ſimul ſemper habent 90°; hinc ſi vnus habeat 45°; totidem habebit alter.

363. COROLL. 3. Data ſumma duorum angulorum innoteſcit tertius, ſi nempe data ſumma ſubtrahatur a 180°: et dato vno angulo innoteſcit ſumma duorum reliquorum, ſi datus a 180° ſubtrahatur.

364. COROLL. 4. Si duo anguli cuiuſdam trianguli aut ſinguli, aut ſimul ſumti aequentur duobus alterius aut ſingulis, aut ſimul ſumtis, etiam tertius aequabitur tertio.

Fig. 27. 365. COROLL. 5. Si ex angulo quopiam A demittatur in latus oppoſitum BC perpendicularis, ea cadet intra triangulum, ſi anguli B et C eidem lateri adhaerentes acuti fuerint. Sit enim, ſi fieri poſſit, perpendicularis AD extra triangulum, erit in triangulo ADC angulus D rectus, angulus DCA obtuſus, cum eius contiguus ſupponatur acutus (287); atqui hoc abſurdum eſt

(361): ergo nequit perpendicularis cadere extra triangulum.

366. Coroll. Si vero alteruter eorum angulorum, e. g. C, obtuſus fuerit, perpendicularis extra triangulum cadet. Si enim intra caderet e. g. in AD, in triangulo ADC angulus D rectus foret, C obtuſus, quod abſurdum eſt (361). Fig. 28.

367. Theorema. *Si in triangulo quouis* ABC *latus vnum* BC *producatur, angulus externus* ACD *aequabitur duobus internis oppoſitis* A *et* B *ſimul ſumtis.* Fig. 26.

Demonstr. Nam circumſcripto circulo (324) angulorum A + B menſura erit arcus $\frac{1}{2}$ BC + $\frac{1}{2}$ AC (342); quae eadem eſt etiam menſura anguli ACD (353).

368. Theorema. *In quouis triangulo angulo maiori maius, minori minus latus opponitur, et contra.*

Demonstr. Circumſcripto enim circulo (324) ſit B > A, erit arcus $\frac{1}{2}$ AC > $\frac{1}{2}$ BC (342), et hinc AC > BC: ergo et chorda ſeu latus AC > BC (320). Sit viciſſim latus AC > BC, erit etiam arcus AC > BC (319), et hinc $\frac{1}{2}$ AC > $\frac{1}{2}$ BC, adeoque angulus B > A (342).

369. Coroll. 1. Si ergo in triangulo quopiam duo anguli aequales ſint, etiam latera iiſdem oppſita aequalia ſunt, et contra. Nam circumſcripto circulo ſit B = C, erit arcus $\frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2}$ AB (342), et hinc AC = AB, adeoque etiam latus AC = AB (320): et contra.

370. Coroll. 2. Quare in triangulo aequilatero omnes tres anguli aequales ſunt; continetque quilibet 60° (360), et contra. Item ſi in triangulo quopiam duo anguli aequales ſint, illud eſt iſoſceles.

Fig. 29. 371. Problema. *Altitudinem acceſſam* AB *ope vmbrae metiri.*

Resolut. Obſeruetur momentum, quo ſol S ſupra horizontem ad altitudinem 45° ſublatus eſt, noteturque eo momento cuſpis vmbrae C in plano horizontali, erit longitudo vmbrae BC aequalis altitudini quaeſitae AB.

Demonstr. Cum enim angulus B ex natura altitudinis rectus ſit, et C ex hypotheſi 45°, erit etiam A 45° (362), et hinc AB = BC (370).

372. Coroll. 1. Siquis in turris faſtigio A poſitus vnum quadrantis aenei in ſuos gradus diuiſi radium ſtatuat perpendiculariter iuxta altitudinem AB, altero abſcindat arcum 45°, et iuxta eius ductum notet in terra punctum C, erit, vt ante, AB = BC.

373. Coroll. 2. Si radio mobili quadrantis abſcindatur arcus 45°, tum verſus C ita ſenſim recedatur, vt radio fixo, ac horizonti parallelo conſpciatur punctum B, radio vero mobili punctum A, erit rurſus AB = BC.

Scholion. Altitudo ſolis 45° etiam obſeruari poteſt deſcribendo in plano horizontali circulum, inque eius centro erigendo perpendiculariter ſtylum aequalem radio. Nam quum vmbra ſtyli huius praeciſe attigerit circuli peripheriam, erit tunc ſol 45° ſupra horizontem elatus. Cum enim tunc ſtylus AB vmbrae ſuae BC aequalis ſit,

etiam anguli iisdem oppoſiti A et C aequales erunt (369), ac proinde quilibet habebit 45° (362).

374. THEOREMA. *Si in duobus triangulis ABC, abc duo latera cum angulo intercepto aequalia fuerint, e. g. BC* = bc, *BA* = ba, *et angulus B* = b, *tota triangula aequalia ſunt.* Fig. 30.

DEMONSTR. Si enim trianguli *abc* vertex *b* concipiatur ita imponi alterius vertici B, vt latus *bc* cadat ſupra BC, duo haec latera propter aequalitatem congruent, adeoque *b* cadente ſupra B, *c* cadet ſupra C: cumque anguli *b* et B aequales ponantur, etiam latus *ba* cadet ſupra BA, et propter aequalitatem cum eodem congruet, et hinc vertex *a* cadet ſupra A; congruent ergo tum anguli, tum latera omnia, tum denique triangula ipſa, ac proinde aequalia ſunt.

375. PROBLEMA. *Metiri diſtantiam duorum locorum A et B, quorum interuallum permeari haud poteſt.* Fig. 31.

RESOLUT. Eligatur ſtatio alicubi in C, vnde ambo loca videri, et accedi poſſint; tum menſurentur ope catenae diſtantiae AC et BC; ac producantur in directum ita vt C*b* fiat = AC, et C*a* = CB, erit hoc ipſo etiam *ab* = AB (374): quare menſurata recta *ab* innoteſcet interuallum AB.

376. COROLL. Si ſpatii anguſtia non ſinat produci latera AC et BC quantum ſatis eſt, fiat e. g. $C\alpha = \frac{1}{2}$ CB, et $C\beta = \frac{1}{2}$ CA, erit etiam $\alpha\beta = \frac{1}{2}$ AB propter ſimilitudinem triangulorum ABC, $\alpha\beta$C, vti adparebit in ſequentibus.

Fig. 30. 377. THEOREMA. *Si in duobus triangulis* ABC, abc *duo anguli cum latere intercepto aequales fuerint, e. g.* B = b, C = c, BC = bc, *et reliqua latera, et tota triangula aequalia ſunt.*

DEMONSTR. Nam latus *bc* lateri aequali BC impoſitum cum eodem congruet, adeoque puncto *b* cadente ſupra B, *c* cadet in C: et ob angulos *b* = B, *c* = C latus *ba* cadet ſupra BA, et *ca* ſupra CA; facile autem patet etiam punctum eorum extremum *a* eadere in A; quocunque enim alio cadere cogitemus, neceſſario mutabitur aequalitas angulorum *b* et B, vel *c* et C contra hypotheſim: quaré tota triangula congruent, et hinc aequalia ſunt, ac *ab* = AB, *ac* = AC.

Fig. 32. 378. PROBLEMA. *Metiri diſtantiam duorum locorum* AB, *quorum vnus tantum* B *poteſt accedi.*

RESOLUT. Electa alicubi ſtatione in E fiat in B ope quadrantis collineatio in A et E, vt innoteſcat angulus EBA, tum diſtantia BE ex E transferatur in C ita vt baculus in C defixus ſit in eadem recta cum E et B: deinde in C fiat collineatio ſub eodem angulo EBA verſus E et D, ita vt angulus C fiat aequalis angulo EBA; denique per lineam CD tamdiu procedatur, donec baculus alicubi in D defixus in eadem recta ſit cum E et A, erit CD = AB. Nam ſi triangula ABE, CED ſibi rite imponerentur, CD cum AB congrueret (377).

SCHOLION. Diſtantias quascunque, et altitudines dimetiendi methodi complures occurrent in ſequentibus: has idcirco duntaxat hic inſinuauimus, vt tirones, qui horum theorematum vſus praeclariſſimos nondum ſentiunt, facilius inducant

in animum harum veritatum fructus vltra ieiunam contemplationem omnino pertinere.

379. THEOREMA. *Si in duobus triangulis omnia latera aequalia fuerint, nempe* bc = BC, ba = BA, ca = CA, *etiam anguli, et tota triangula aequalia ſunt.* Fig. 30.

DEMONSTR. Deſcribantur enim centris B et C, item *b* et *c*, radiis BA et CA, ac *ba* et *ca* circuli ſeſe interſecantes in verticibus triangulorum A et *a*: deinde cogitetur triangulum *bca* triangulo BCA ita imponi, vt latus *bc* cum latere BC aequali congruat, ſeu vt punctum *b* cadat in B, *c* in C; congruent hoc ipſo circuli aequales *b* et B, *c* et C, adeoque latus *ba* terminabitur alicubi in peripheria circuli B, et latus *ca* in peripheria circuli C; cum ergo ea latera ambo deſinant in idem punctum *a*, debet hoc punctum attingere vtriusque circuli peripheriam: ſeu cadere in communem eorum interſectionem A: quare latus *ba* cum BA, *ca* cum CA, congruet: et hinc tota triangula aequalia ſunt.

380. COROLL. Si in triangulo iſoſceli ducta recta quapiam ex angulo aequalibus lateribus intercepto adfuerit vnum ex hiſce tribus, 1) quod angulus in vertice ſecetur bifariam, 2) quod baſis ſeu latus angulo illi oppoſitum ſecetur bifariam, 3) quod eadem ſecetur ad angulos rectos, ſemper aderunt reliqua duo; nam ſemper diuidetur id triangulum in duo aequalia, ſecumque congruentia triangula, et quidem in primo caſu, et ſecundo per n. 374, in tertio per n. 374, vel 377. Item ſi in quopiam triangulo duo ex his

adfuerint, erit id iſoſceles: iterum enim in duo aequalia, et ſecum congruentia triangula diuidetur.

Fig. 33. 381. THEOREMA. *Si duo triangula* ABC, abc *inter ſe ſimilia, ſeu aequiangula, ac inaequalia fuerint, minusque maiori ſic imponatur, vt angulo* a *cum aequali* A *congruente latera* ab *et* ac *cadant ſupra homologa* AB *et* AC, *tertium* bc *erit tertio* BC *parallelum.*

DEMONSTR. Eſt enim ex hypotheſi angulus *b* = B: ergo rectae *bc* et BC parallelae ſunt (313).

382. COROLL. Si angulus *b* imponeretur angulo B, parallela fierent latera *ac* et AC: ſi angulus *c* imponeretur angulo C, parallela fierent latera *ab* et AB, vt patet conſideranti.

383. Tetragonum habens latera oppoſita parallela dicitur *parallelogrammum*, et ſpeciatim *rectangulum*, ſi anguli omnes recti ſint, *quadratum* vero, ſi inſuper etiam latera omnia aequalia ſint. Si vero latera aequalia, at anguli inaequales fuerint, *rhombus*; ſi neque latera, neque anguli fuerint aequales, *rhomboides* adpellatur. Reliquae figurae quadrilaterae, quae non ſunt parallelogramma, *trapezia* vocantur.

Fig. 34. 384. THEOREMA. *In quauis figura quadrilatera* 1) *ſi latera oppoſita fuerint parallela, erunt eadem aequalia.* 2) *Si aequalia fuerint, erunt eadem parallela.* 3) *Si bina oppoſita aequalia et parallela fuerint, etiam alia bina aequalia, et parallela erunt.*

DEMONSTR. Ducta enim ad angulos oppoſitos recta AD, quae *diagonalis* dicitur, 1) ſi latera oppoſita AB et CD, item BD et AC parallela fuerint, erit angulus $o = x$; $m = n$ (311), latus AD = AD: ergo triangula ABD, ACD ſibi impoſita congruunt (377), et hinc AB = CD, BD = AC.

2) Si fuerit AB = CD, BD = AC, cum etiam ſit AD = AD, triangula eadem rurſus ſibi impoſita congruunt (379); et hinc angulus $o = x$, $m = n$, adeoque latera AB et CD, BD et AC parallela ſunt (313).

3) Si denique latera AB et CD aequalia, et parallela fuerint, erit angulus $o = x$ (311), cumque ſit AD = AD, iterum eadem triangula ſibi impoſita congruunt (374), et hinc BD = AC, angulus $n = m$; vnde BD et AC inſuper parallela ſunt (313).

385. COROLL. 1. Diagonalis diuidit parallelogrammum in duo triangula aequalia: et hinc triangulum eſt dimidium parallelogrammi eandem baſim, et altitudinem habentis, vel quod idem eſt, ſupra eandem baſim inter easdem parallelas conſtituti.

386. COROLL. 2. Si duo parallelogramma ſimilia, ſeu aequiangula ſunt, etiam triangula eorum ſcilicet dimidia ſimilia ſunt: quare duo triangula ſimilia ſemper ſpectari poſſunt, tanquam dimidia duorum ſimilium parallelogrammorum.

387. THEOREMA. *Si duo triangula* ABC, ACD *eandem habeant altitudinem, ſeu perpendiculum e vertice* A *in latus oppoſitum demiſſum, erunt ea ad ſe inuicem vt baſes, ſeu vt* BC : CD. Fig. 35.

Demonstr. Nam triangulum ABC aequatur ſummae infinitarum parallelarum BC, IN, HM, GL etc. et triangulum ACD ſummae infinitarum parallelarum CD, NR, MQ, LP etc. quae a baſi vſque ad verticem duci poſſunt. Porro hae parallelae a vertice A incipiendo creſcunt in progreſſione arithmetica, ſecundum eandem ſcilicet differentiam: cum enim eaedem a ſeſe aequaliter diſtent, in triangulis $OpP$, $PqQ$, $QrR$, $RdD$ aequantur perpendicula, ſeu latera $Op$, $Pq$, $Qr$, $Rd$; item aequantur anguli recti $p$, $q$, $r$, $d$; et anguli $OPp$, $PQq$, $QRr$, $RDd$ (309): ergo etiam aequantur anguli O, P, Q, R (364), et hinc triangula haec ſibi impoſita congruunt (377), ac proinde $pP = qQ = rR = dD$. Eodem modo oſtenditur eſſe $Gg = Hh = Ii = Bb$; item $Ll = Mm = Nn = Cc$. Iam in triangulo ABC ſecunda parallela GL eſt $= Gg + gl - Ll$, ſeu pro $gl$ ponendo FK (383) GL eſt $= Gg + FK - Ll$: ergo tollendo FK, differentia inter parallelas FK et GL eſt $Gg - Ll$; eodem modo differentia inter GL et HM eſt $Hh - Mm$; inter HM et IN eſt $Ii - Nn$ etc. atqui hae differentiae aequales ſunt, cum vbique ab aequalibus tollantur aequalia: ergo parallelae in triangulo ABC faciunt progreſſionem arithmeticam. Eodem modo patet in triangulo ACD differeutias parallelarum $Ll + pP$, $Mm + qQ$ etc. eſſe aequales, adeoque et illic parallelas facere progreſſionem arithmeticam. Iam in his progreſſionibus parallelarum, in quibus numerus terminorum eſt perpendiculum AE (tot enim eſſe poſſunt parallelae,

quot habet puncta id perpendiculum), terminus primus, ſeu prima parallela in A eſt $= 0$, termini vltimi ſunt BC et CD: quare ſummae harum progreſſionum, ſeu triangula ABC, ACD ſunt ad inuicem, vt $AE \times \frac{1}{2}BC : AE \times \frac{1}{2}CD$ (228) $= \frac{1}{2}BC : \frac{1}{2}CD = BC : CD$.

388. THEOREMA. *Parallelogramma* ABCD, EBCF *ſuper eadem baſi* BC, *et inter eaſdem parallelas* AF *et* BC *conſtituta aequalia ſunt.* Fig. 36.

DEMONSTR. Eſt enim AB=DC, BE=CF AD=BC, EF=BC (383): ergo AD=EF, e quibus n. 1. demendo idem ED, n. 3. addendo idem ED, erit AE=DF, et hinc triangula AEB, DFC aequalia ſunt (379): his ergo addendo in primo caſu trapezium EBCD, in ſecundo triangulum DBC, habebuntur aequalia parallelogramma ABCD, EBCF; in tertio caſu demendo ab iiſdem aequalibus triangulum DOE, et addendo triangulum OBC idem obtinetur.

389. COROLL. 1. Si ergo duo parallelogramma aequales habeant baſes, et altitudines, aequalia ſunt: nam et ſupra eandem baſim, et inter eaſdem parallelas conſtitui poſſunt (308).

390. COROLL. 1. Quoniam triangula dimidia ſunt parallelogrammorum eandem baſim, et altitudinem habentium (385), etiam triangula ſupra eandem baſim intra eaſdem parallelas conſtituta; vel aequales baſes, et altitudines habentia aequalia ſunt.

391. PROBLEMA. *Figuram quamuis rectilineam* ABCDEF *in aequale triangulum transformare.* Fig. 37.

RESOLUT. Omiſſo vno angulo B ducatur diagonalis CA, et huic ex omiſſo angulo B paralle-

la BG occurrens lateri FA producto alicubi in G, et ducatur CG: aequalia erunt triangula ACB, ACG (390), ſi ergo pro triangulo ACB ſubſtituatur triangulum ACG, data figura mutabitur in aliam GFEDCG vno latere iam minus habentem. Idem prorſus fiat ex parte anguli E, et prior figura abibit in IDCGI iam duobus lateribus pauciora habentem. In hac omiſſo angulo D ducatur, vt ante, diagonalis CI, eique ex omiſſo angulo D parallela DK occurrens lateri AF producto alicubi in K, tum ducatur CK; erit GCK triangulum petitum.

392. Coroll. Facile adparet hac arte minuendo ſucceſſiue laterum numerum omne polygonum poſſe conuerti in aequale triangulum.

393. Problema. *Datum triangulum in partes quoteunque aequales diuidere.*

Resolut. 1) Si diuiſio facienda ſit per lineas ex aliquo angulo ductas, diuidatur latus oppoſitum in totidem partes aequales: rectae ad ſingula diuiſionum puncta ductae diuident triangulum in totidem partes aequales (387).

Fig. 38. 2) Si diuiſio facienda ſit per lineas ex aliquo latere e. g. AB ductas, diuidatur latus illud in totidem aequales partes, e. g. in 5, deinde ex primo diuiſionis puncto P ducatur recta PC, erit PCB pars quinta trianguli ACB (387): diuidatur deinde latus AC in partes aequales vna pauciores, e. g. in noſtro caſu in 4, ac ducantur rectae PD, PE, PF, erit diuiſum totum triangulum in partes 5: nam totum triangulum PAC continet ex BAC $\frac{4}{5}$ partes; ergo quaeuis pars, e. g. APF, continebit $\frac{1}{5}$ partem.

3) Si

3) Si demum diuiſio facienda ſit ex aliquo puncto intra triangulum poſito, diuidantur duo latera BA et BC in totidem partes aequales e. g. in 5, et per prima diuiſionum puncta D et E ducantur rectae Dd, Ee parallelae lateribus BC et BA, quarum interſectio P ſi iungatur cum angulis A et B, erit triangulum APB quinta pars totius ABC. Eſt enim BAE quinta eius pars (387), et BAE eſt = APB (390). Eodem modo patet, ducta recta PC triangulum BPC eſſe quintam partem. Quare ſi reliquum PAC in tres partes diuidatur per rectas PF et PG, erit totum triangulum ABC diuiſum in quinque partes aequales. Fig. 39.

394. PROBLEMA. *Datum polygonum* ABCDE *in partes quotcunque aequales diuidere.* Fig. 40.

RESOLUT. Transformetur primum polygonum datum in aequale triangulum AFG (391), cuius baſis FG diuidatur in tot aequales partes, in quot polygonum diuidi debet, e. g. in 4, ductisque rectis AH; AK, AI ad ſingula puncta diuiſionum, erunt triangula FAH, HAK, KAI, IAG ſingula quarta pars trianguli FAG (393), adeoque etiam polygoni dati. Quia vero extrema triangula extra polygonum exeunt, hoc pacto reducenda erunt. Cum aequentur triangula AFC, ABC (390), ſi vtrique addatur triangulum ACH, erit trapezium ABCH aequale triangulo AFH, ac proinde quarta pars polygoni. Ex altera parte ducta IR ad AD parallela, et ducta recta AR, aequabuntur triangula ARD, AID (cit.), item triangula AED, AGD (cit.): ſi ergo illa ab his ſubtrahantur, reſtabunt AER, AGI aequalia;

atqui hoc eſt quarta pars polygoni: igitur et illud. Quare polygonum datum in 4 aequales partes ABCH, AHK, AKDR, ARE diuiſum eſt.

Fig. 41. 395. THEOREMA. *In quouis polygono ſumma omnium angulorum* $A + B + C + D + E$ *aequatur bis tot rectis, quot ſunt latera, demtis quatuor.*

DEMONSTR. Nam ſi e puncto quouis P intra polygonum aſſumto ducantur rectae ad ſingulos angulos, patet polygonum reſolui in tot triangula, quot ſunt latera: quare cum quoduis triangulum contineat duos rectos (360), omnia ſimul continebunt bis tot rectos, quot ſunt latera. Verum anguli triangulorum circa punctum P, qui efficiunt ſimul 4 rectos (291), ad polygoni angulos non pertinent: his ergo ablatis remanent anguli polygoni aequales bis tot rectis, quot ſunt latera demtis quatuor.

Fig. 42. 396. THEOREMA. *Cuiuis polygono regulari* ABCDEF *poteſt circumſcribi circulus tranſiens per omnium angulorum vertices.*

DEMONSTR. Si enim anguli proximi A et B biſecentur, rectae biſecantes AG, BG concurrent alicubi in G, et conſtituent triangulum iſoſceles AGB, in quo ob angulos ad A, et B aequales, eſt $GA = GB$ (369). Ducatur ex G ad ſequentem angulum recta GC, erit ob $AB = BC$, $BG = BG$, et ob angulos ad B per conſtruct. vtrinque aequales, triangulum $AGB = BGC$ (374), et hinc $GB = GC$, et angulus $o = x$; atqui $o$ eſt dimidium totius A per conſtruct. ſeu totius C: ergo etiam $x$ eſt dimidium eiuſdem C, et hinc $x = y$. Ducatur porro recta GD

ad ſequentem angulum: erit ob $BC = CD$, $CG = CG$, $x = y$, triangulum $BCG = CGD$ (cit.), et hinc $GB = GD$. Habemus ergo $GA = GB = GC = GD$: ac eodem modo demonſtrantur his eſſe aequales GE, et GF: datur itaque intra polygonum punctum quoddam G, ex quo tanquam centro ſi radio GA deſcribatur circulus, is tranſeat per omnia puncta A, B, C etc.

397. COROLL. 1. Ex praeſentis theorematis demonſtratione perſpicuum eſt, per rectas e centro circuli circumſcripti ductas diuidi bifariam angulos polygoni regularis: illudque reſolui in tot triangula aequalia, et iſoſcelia, quot ſunt polygoni latera.

398. COROLL. 2. Vnumquodque latus polygoni regularis circulo inſcripti ſubtendit arcum tot gradus continentem, quot indicat quotus, qui prodit, ſi 360° per numerum laterum diuidantur (318).

399. COROLL. 3. Latus hexagoni regularis aequatur radio circuli circumſcripti. Nam ſi AB ſit latus hexagoni, in triangulo AGB angulus G eſt 60° (398): ergo anguli $A + B = 120°$ (363), et quia hi anguli inter ſe aequantur (397), quilibet eſt 60°: quare $AB = AG$ (369).

400. PROBLEMA. *Dato polygono regulari ABCDEF circulum circumſcribere.*

RESOLUT. Biſecentur anguli proximi A et B per rectas AG et BG (328); erit in G centrum circuli radio GA circumſcribendi (396).

401. PROBLEMA. *Dato circulo polygonum regulare inſcribere.*

Resolut. Diuidantur 360° per numerum laterum polygoni inſcribendi, tum capiantur in peripheria circuli tot gradus, quot indicat quotus: erit chorda eoſdem ſubtendens latus polygoni (398), quod proinde transferendum eſt ope circini in peripheriam, quoties fieri poteſt.

Scholion. Circuli peripheria geometrice, ſeu ope ſolius circini et regulae, diuidi poteſt in 4 partes aequales per duas diametros ſibi perpendiculares; tum in partes 6 per radium in peripheria circumlatum (399), adeoque etiam in partes 3, alterna ſcilicet diuiſionum puncta omittendo: denique in partes 5 ope eorum, quae capite ſequenti dicemus; et hinc etiam in partes 15; ſi enim e duabus quintis tollas tertiam periphериae partem, reſtabit $\frac{1}{15}$: nam $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$. Poſſunt praeterea continua biſectione hae diuiſiones in infinitum continuari: vnde iam intelligitur, quaenam polygona regularia poſſint geometrice inſcribi circulo.

402. Theorema. *Cuiuis polygono regulari poteſt inſcribi circulus, qui omnia eius latera in medio tangat.*

Demonstr. Cum enim latera polygoni regularis ſint totidem chordae aequales in circulo circumſcripto, aequaliter diſtant a centro G (318): ergo ſi e centro G demittantur in eas perpendicula G$i$, erunt ea inter ſe aequalia (301), conſequenter circulus quouis perpendiculo G$i$ deſcriptus tranſibit per omnia puncta $i$, quae erunt in mediis lateribus (322), et tanget in iiſdem latera (303).

403. PROBLEMA. *Dato polygono regulari circulum inſcribere.*

RESOLUT. Ex inuento centro G (400) demittatur ad latus quodcunque AB perpendicularis G*i*, erit illa radius circuli inſcribendi (402).

404. PROBLEMA. *Dato circulo polygonum regulare circumſcribere.*

RESOLUT. Diuidantur 360° per numerum laterum polygoni circumſcribendi, capiaturque arcus *ab* tot graduum, quot indicat quotus, et biſecetur in puncto *i*, per quod ducatur tangens vtrinque occurrens radiis G*a*, et G*b* productis in A et B (351); erit AB latus polygoni circumſcribendi (402). Denique centro G radio GA deſcribatur circulus, ac in eo ope circini latus AB adplicetur, quoties poteſt.

SCHOLION. Rurſus adparet circulo geometrice circumſcribi non poſſe, niſi triangulum aequilaterum, quadratum, pentagonum, pentadecagonum, et in quibus numerus horum laterum creſcit continenter in duplum.

# CAPVT IV.

## *De linearum Proportionibus.*

405. THEOREMA. *Si intra triangulum ABC cuiuis lateri BC ducatur parallela DE, ſecabit haec reliqua trianguli latera proportionaliter ita vt ſit* AB : AD = AC : AE. Fig. 45.

Demonstr. Ductis enim rectis DC et EB aequabuntur triangula DBE, DEC (390); quare addendo vtrique triangulum ADE, aequalia erunt triangula AEB, ADC, ac proinde ambo eandem habebunt rationem ad triangulum ADE: eſt vero triangulum AEB ad triangulum AED, ſicut AB: AD; et triangulum ADC ad idem AED, ſicut AC: AE (387): ergo AB: AD = AC: AE.

406. Coroll. 1. Erit ergo ſubtrahendo BD: AD = CE : AE (205). Et generatim quotcunque parallelae ducantur lateri BC, erunt ſegmenta vnius lateris ſegmentis alterius proportionalia; eorum enim ratio ſemper erit eadem, quae laterum AB et AC.

407. Coroll. 2. Viciſſim ſi ſit AB : AD = AC: AE, erit DE parallela lateri BC: ſi enim non eſſet, poſſet eidem per punctum D duci alia parallela, quae in alio puncto ſecaret latus AC: eſſet ergo vtrumque ſegmentum ad AC in eadem ratione, qua AD ad AB, ac proinde cum AC ſit = AC, bina illa ſegmenta, quorum vnum foret pars alterius, eſſent inter ſe aequalia, quod abſurdum eſt.

408. Coroll. 3. Si duo triangula fuerint ſimilia, ſiue aequiangula, latera homologa, ſeu aequalibus angulis oppoſita erunt proportionalia. Nam ſi minus maiori debite imponatur, latus tertium tertio parallelum erit (381), ac proinde habebitur caſus praeſentis theorematis (405).

409. Coroll. 4. Triangula iſoſcelia ſimilia ſunt, adeoque latera homologa habent proportionalia,

ſi angulum a lateribus aequalibus comprehenſum, vel angulum ad baſim vnum vni aequalem habuerint; ſunt enim hoc ipſo in caſu vtroque aequiangula.

410. Coroll. 5. Si ſingula vnius trianguli latera fuerint ſingulis alterius parallela, erunt ea etiam inter ſe proportionalia. Si enim vnius duo latera *ca* et *cb* producantur, occurrent lateri alterius non parallelo AB producto: erunt ergo anguli A et *a* ambo aequales angulo *x* (309), et anguli B et *b* ambo aequales angulo *y* (cit.): ergo erit $A = a$, $B = b$, adeoque $C = c$ (364), ac proinde latera homologa proportionalia ſunt (408). Fig. 44.

411. Coroll. 6. Si in triangulo quouis ABC angulus A per rectam AD bifariam ſecetur, erit BD: DC = BA: AC. Nam producto latere CA dum fiat AE = AB, ductaque recta EB, erit angulus $BAC = x + y$ (367), ſeu ob $x = y$ (369) $BAC = 2x$, et hinc $\frac{1}{2}$ $BAC = o = x$, adeoque rectae EB et AD parallelae ſunt (313); ergo BD: DC = AE, ſeu AB: AC (406). Fig. 45.

412. Coroll. 7. Si duae rectae AB et CD occurrant quibusuis parallelis MN, OP, QR etc. ſecabuntur ab his proportionaliter. Si enim ducatur *eg* parallela ad AB, erit *ef*: *fg* = HI: IK (406), atqui *ef* = EF, et *fg* = FG (383): ergo EF: FG = HI: IK. Fig. 46.

413. Problema. *Datis tribus lineis rectis inuenire quartam proportionalem.*

Resolut. Iungantur duae rectae indefinitae ſub quouis angulo A, et in alterutra ſumantur Fig. 43.

AB, AD aequales datis duabus primis rectis, tertiae vero datae fiat aequalis AC; tum iungantur puncta B et C recta BC, et huic per punctum D ducatur parallela DE (349), erit recta AE quarta proportionalis quaeſita. Nam AB: AD = AC: AE (405).

414. Coroll. 1. Si ad datas duas tertia proportionalis petatur, ſecunda linea data, et in rectam AB translata, transferatur etiam loco tertiae in AC, cetera fiant vt ante.

415. Coroll. 2. Si recta AC in partes quotcunque aequales, aut in data quacunque ratione diuidenda ſit, ſumatur recta AB in eadem ratione iam diuiſa, iungaturque ei ſub quocunque angulo A, et extrema puncta B et C connectantur linea BC, cui per ſingula rectae AB diuiſionum puncta agantur parallelae, diuident hae rectam AC in eadem illa ratione (406).

416. Theorema. *Si duo triangula* ABD, a d e *circa aequales angulos* A *et* a *latera habuerint proportionalia, erunt eadem aequiangula.*

Demonstr. Si enim angulus *a* ita imponatur angulo A, vt latus *a d* cadat ſupra AB e. g. vſque in D, etiam latus *ae*, propter aequalitatem ſcilicet angulorum *a* et A, cadet ſupra AC e. g. vſque in E, eritque AD = *ad*, AE = *ae*, ac totum triangulum ADE = *a d e* (374): erit ergo ex hypotheſi AB: AD = AC: AE; hinc rectae DE et BC parallelae ſunt (407): quare angulus D ſeu *d* = B, angulus E ſeu *e* = C (309).

417. THEOREMA. *Si duorum triangulorum* ABC, ade *omnia latera fuerint proportionalia, erunt eadem aequiangula.*

DEMONSTR. Fiat enim AD = *ad*, ac per punctum D ducatur DE parallela ad BC: erit AB: AD = AC: AE (405); et ex hypotheſi AB: *ad* ſeu AD = AC: *ae*: ergo AC: AE = AC: *ae*, et alternando AC: AC = AE: *ae* (205); ſed AC = AC, ergo etiam AE = *ae*. Eodem modo oſtenditur eſſe DE = *de*. Quare triangula *ade*, ADE ſibi impoſita congruunt (379), et hinc angulus *a* = A, *d* = D = B, *e* = E = C (309).

418. THEOREMA. *Segmenta chordarum* AB *et* CD *ſeſe in circulo vtcunque interſecantium ſunt reciproce proportionalia.* Fig. 47.

DEMONSTR. Ductis enim chordis AD et CB erit angulus $o = x$, $y = z$ (344); ac praeterea verticales ad E vtrinque aequales (292): ergo AE: EC = ED: EB (408).

419. COROLL. 1. Erit ergo AE × EB = EC × ED (202): id eſt, factum ex vnius chordae ſegmentis aequatur facto ex alterius ſegmentis.

420. COROLL. 2. Si vna chordarum AB diameter fuerit, et altera CD eidem perpendicularis, erit ED = CE (322): ergo in ſuperiori proportione pro ED ſubſtituendo CE erit AE : CE = CE: EB; hoc eſt, perpendicularis e quouis peripheriae circuli puncto ad diametrum demiſſa eſt media proportionalis inter ſegmenta diametri. Fig. 48.

421. PROBLEMA. *Inter duas datas rectas* AE *et* EB *inuenire mediam geometrice proportionalem.*

RESOLUT. Iungantur rectae datae in vnicam AB, qua in I biſecta deſcribatur ſemicirculus, ac e puncto iuncturae E erigatur perpendicularis EC, donec occurrat peripheriae (305); erit haec media proportionalis petita (420).

Fig. 49. 422. THEOREMA. *Si e puncto quopiam* A *ducantur duae ſecantes* AB *et* AD, *erunt ſegmenta* AC *et* AE *extra circulum ſita integris ſecantibus reciproce proportionalia.*

DEMONSTR. Ductis enim chordis CE et BD, in triangulis ACE, ABD praeter communem angulum A erit angulus ACE = ADB ob eandem menſuram $\frac{1}{2}$ ECB, et angulus AEC = ABD ob eandem menſuram $\frac{1}{2}$ CED (342, 353): ergo AB: AD = AE: AC (408).

Fig. 50. 423. COROLL. 1. Si ex eodem puncto A vna ſecans, altera tangens ducatur, iterum aequiangula erunt triangula ACT, ABT, cum anguli ATC, ABT eandem habeant menſuram $\frac{1}{2}$ TC (340, 342), et angulus A vtrique communis ſit: ergo AC: AT = AT: AB, id eſt, tangens eſt media proportionalis inter totam ſecantem AB, et eius ſegmentum AC.

424. COROLL. 2. Si ergo inter duas rectas AB et AC quaeratur media proportionalis, patet hinc noua methodus eam inueniendi. Nempe ex maiori AB debet reſecari minor AC, et ſupra reſiduum CB tanquam diametrum duci circulus, atque ad hunc ex puncto A tangens (352), quae erit media proportionalis quaeſita.

425. Coroll. 3. Si ex eodem puncto A duae tangentes ducantur ad circulum, erit AC: AT = AT: AB, et AC: At = At: AB, ergo $AC \times AB = AT^2 = At^2$ (202), et hinc AT = At (164).

426. Coroll. 4. Si ſecans AB, aut recta quaeuis alia ſecetur bifariam in D, et non bifariam in C; erit quadratum ſegmenti CD intra ſectiones comprehenſi vna cum facto partium inaequalium AC et CB, aequale quadrato partis dimidiae AD. Sit enim $AB = 2a$, $AC = b$, erit $AD = a$, $CD = a - b$, $CB = 2a - b$: ergo $CD^2 + AC \times CB = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab - b^2 = a^2 = AD^2$. Et ſi rectae DE in A bifariam ſectae adiiciatur EC, erit $AC^2 = AE^2 + CE \times CD$. Sit enim $DE = 2a$, $EC = x$, erit $AE = a$, $AC = a + x$, $CD = 2a + x$, ergo $AE^2 = a^2$, $CE \times CD = 2ax + x^2$, et hinc $AE^2 + CE \times CD = a^2 + 2ax + x^2 = (a + x)^2 = AC^2$. Fig. 61.

427. Problema. *Datam rectam* AB *media, et extrema ratione ſecare, ſeu ita, vt pars maior* AD *ſit media proportionalis inter totam* AB, *et partem minorem* BD. Fig. 51.

Resolut. Erigatur in B perpendicularis BC, quae ſit $= \frac{1}{2}$ AB, ac ea tanquam radio e centro C deſcribatur circulus, quem tanget recta BA in puncto B (303); tum ducta ſecante AF fiat AD = AE, erit recta AB in D media, et extrema ratione ſecta.

Demonstr. Eſt enim AF: AB = AB: AE (423), ergo ſubtrahendo AF — AB: AB = AB — AE: AE (205), atqui ex conſtr. AE = AD,

et EF $=$ 2BC $=$ AB; his adeo ſubſtitutis erit AD : AB $=$ DB : AD; vnde $AD^2 = AB \times DB$ (202), et hinc AB: AD $=$ AD : DB (204).

Fig. 52. 428. PROBLEMA. *Conſtruere triangulum iſoſceles* ABC, *in quo quilibet angulus ad baſim* B *et* C *ſit duplus anguli* A.

RESOLUT. Diuidatur recta quaecunque AB media, et extrema ratione in puncto D (427), et ſuper minore ſegmento DB conſtruatur triangulum iſoſceles BCD facta centris D et B interſectione in C radio AD, tum iungantur puncta A, et C, erit triangulum ABC tale, quale petebatur.

DEMONSTR. Eſt enim angulus $o = x + n$ (367), ſeu ob latera AD et DC ex conſtr. adeoque etiam angulos $x$ et $n$ aequales (369), erit $o = 2x$; ſed $o = y$ (cit.), ergo $y = 2x$. Rurſus per conſtr. AB : AD $=$ AD : DB, ergo ob AD $=$ DC $=$ BC erit AB : BC $=$ BC : DB; vnde triangula ABC, DBC aequiangula ſunt (416), et hinc $n + r$, ſeu totus angulus C $= s = y = 2x$, et AB $=$ AC (369).

429. PROBLEMA. *Dato circulo decagonum regulare inſcribere.*

RESOLUT. Radius circuli dati AB ſecetur in D media, et extrema ratione (427), erit ſegmentum maius AD latus decagoni.

DEMONSTR. Nam conſtructo triangulo iſoſceli ABC iuxta problema praecedens, erunt anguli $A + B + C = 180°$ (360) $= \frac{5}{5}\, 180°$, et quiuis angulus ad baſim B vel $C = \frac{2}{5}\, 180° = 72°$, adeoque angulus $A = \frac{1}{5}\, 180° = 36° = \frac{360°}{10}$: ergo BC ſeu AD eſt latus decagoni (398).

430. COROLL. Si ergo latus decagoni circumferendo peripheria circuli in 10 partes aequales diuidatur, et diuiſionum puncta alternis omiſſis connectantur, habebitur pentagonum regulare circulo inſcriptum.

431. THEOREMA. *Si ex vertice anguli recti* B *demittatur in hypotenuſam perpendicularis* BD, *diuidet haec triangulum* ABC *in duo triangula* ABD, DBC *tam toti, quam ſibi ſimilia.* Fig. 53.

DEMONSTR. Nam in triangulis ABC, ABD praeter angulum communem A, anguli B et D recti, adeoque aequales ſunt; hinc etiam tertius BCA aequatur tertio ABD (364). Eodem modo patet, aequiangula eſſe triangula ABC, DBC praeter angulum C communem rectos in B et D habentia: vnde patet etiam triangula ABD, DBC aequiangula, ſeu ſimilia eſſe.

432. COROLL. 1. Eſt ergo conferendo triangula ſimilia ABC, ABD, $AC : AB = AB : AD$ et hinc $AB^2 = AC \times AD$; et conferendo triangula ABC, BDC, $AC : BC = BC : DC$ (408), et hinc $BC^2 = AC \times CD$ (202): hoc eſt, chordae AB et BC ſunt mediae proportionales inter diametrum, ſeu hypotenuſam AC, et eius ſegmenta AD aut DC chordis adiacentia. Vnde iterum adparet modus inter duas datas rectas mediam proportionalem inueniendi.

433. COROLL. 2. Quoniam $AB^2 + BC^2 = AC \times AD + AC \times DC = AC \times (AD + DC) = AC \times AC = AC^2$, patet in quouis triangulo rectangulo quadratum hypotenuſae aequari quadratis cathetorum ſimul ſumtis.

434. COROLL. 3. Viciſſim ſi fuerit $AC^2 = AB^2 + BC^2$, erit B angulus rectus. Erecta enim ad AB perpendiculari BE, quae ſit $= BC$, ductaque recta EA, erit $EA^2 = AB^2 + BE^2$ (433), ſeu pro BE ponendo BC, $EA^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2$: ergo $EA = AC$. Vnde triangula AEB, ABC ſibi impoſita congruunt (379), et angulus ABE, qui ex conſtr. rectus eſt, aequatur angulo ABC; ergo etiam hic rectus eſt.

435. PROBLEMA. *Datis quotcunque quadratis vnum aequale conſtruere.*

Fig. 54. RESOLUT. Latera duorum quorumuis quadratorum AB et BC iungantur ſibi ad angulum rectum, ducaturque hypotenuſa AC; erit eius quadratum aequale quadratis rectarum AB et BC, ſeu $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (433). Rurſus rectae AC iungatur ad angulum rectum latus tertii quadrati CD, et ducatur hypotenuſa AD, erit $AD^2 = AC^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2$. Iterum rectae AD iungatur ad angulum rectum latus quarti quadrati DE, et ducatur hypotenuſa AE, erit $AE^2 = AD^2 + DE^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2$, et ſic porro.

436. COROLL. Si datum quadratum duplicandum, triplicandum etc. ſit, rectae AB, BC, CD etc. eiuſdem lateri aequales fieri debent.

437. PROBLEMA. *Datis duobus quadratis conſtruere quadratum, quod ſit aequale eorundem differentiae.*

Fig. 53. RESOLUT. Supra latus quadrati maioris AC tanquam diametrum deſcribatur ſemicirculus, ac in eo pro chorda adplicetur latus quadrati minoris AB, erit altera chorda BC latus quadrati

quaeſiti. Cum enim in B ſit angulus rectus (345), erit $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (433), et hinc $AC^2 - AB^2 = BC^2$.

Scholion. Latere inuento conſtruitur quadratum, ſi latus ſibi ad angulum rectum iungatur, eodemque tanquam radio ex vtroque extremo tanquam centro ducantur arcus ſe interſecantes, ac interſectio cum extremis iungatur.

438. Theorema. *Si ex figurarum ſimilium, ſeu aequales angulos, et latera homologa proportionalia habentium angulis aequalibus* A *et* a, *ac ſimiliter poſitis ducantur diagonales* AC *et* ac, AD *et* ad, *reſoluentur figurae in totidem triangula ſimilia.* Fig. 55.

Demonstr. Nam ob figurarum ſimilitudinem angulus B eſt = *b*, et AB : *ab* = BC : *bc*; ergo triangula ABC, *abc* ſimilia ſunt (416), vnde angulus O = *o*, et AC : *ac* = BC : *bc*. Porro ab aequalibus angulis C et *c* demendo aequales O et *o*, reſtabit N = *n* : et cum ſit BC : *bc* = CD : *cd*, erit quoque AC : *ac* = CD : *cd*; vnde etiam triangula ACD, *acd* ſimilia ſunt (cit.). Eadem eſt demonſtratio pro reliquis triangulis.

439. Coroll. 1. Viciſſim figurae conſtantes triangulis ſimilibus eodem numero, eodemque ordine diſpoſitis ſimiles ſunt. Nam et anguli correſpondentes aequales ſunt, et latera homologa proportionalia, nempe AB : *ab* = BC : *bc* = AC : *ac* = CD : *cd* etc. Vnde polygona regularia totidem laterum ſimilia ſunt.

440. Coroll. 2. Cum latera polygonorum ſimilium ſint termini proportionales, erit ſumma antecedentium AB + BC + CD + DE + EA ad

ſummam conſequentium $ab + bc + cd + de + ea$, vt duo quaeuis latera homologa, e. g. vt AB: $ab$ (214.), id eſt, peripheriae, ſeu perimetri figurarum ſimilium ſunt vt duo quaeuis latera homologa.

441. THEOREMA. *Perimetri polygonorum regularium totidem laterum ſunt vt radii circulorum iisdem circumſcriptorum.*

Fig. 56. DEMONSTR. Sint ED et $ed$ latera eiuſmodi polygonorum, continebunt arcus EAD, $ead$ totidem numero gradus (398); ſi ergo ex centro in latera demittantur perpendiculares CA et $ca$, erunt etiam arcus dimidii AD et $ad$ totidem numero graduum (322): quare in triangulis BCD, $bcd$ praeter rectos B et $b$, aequantur anguli C et $c$, ac proinde etiam Anguli D et $d$ (364): eſt igitur CD: $cd$ = BD: $bd$ (408), ſiue cum tota ſint vt dimidia (210), et BD, $bd$ ſint dimidia laterum ED et $ed$ (322), erit CD: $cd$ = ED: $ed$; atqui etiam perimetri horum polygonorum vtpote ſimilium (439) ſunt vt ED: $ed$ (440); ergo etiam ſunt vt CD: $cd$.

442. COROLL. Si numerus laterum polygonorum circulis inſcriptorum in infinitum augeatur, magnitudo autem in infinitum minuatur, polygonorum perimetri tandem cum peripheria circulorum circumſcriptorum congruent: quare circuli ſpectari poſſunt tanquam polygona regularia infinitorum laterum: ergo peripheriae circulorum ſunt vt radii (441), vel vt diametri (210).

443. PROBLEMA. *Dato cuiuis polygono* ABCDE *aliud ſimile conſtruere.*

RE-

Resolut. Datum, vel aſſumtum polygoni conſtruendi latus *Ab* transferatur in latus homologum AB polygoni dati, ſi opus ſit, productum: tum ductis ex angulo A diagonalibus AC, et AD itidem ſi neceſſe ſit productis, per punctum *b* ducatur recta *bc* lateri BC parallella, per punctum *c* recta *cd* lateri CD parallela, per punctum *d* recta *de* lateri DE parallela; obtinebitur polygonum A*bcde* ſimile polygono dato ABCDE (439), cum triangula ABC, A*bc*, et ACD, A*cd*, ac denique ADE, A*de* ſimilia ſint.

# CAPUT V.

## *De Trigonometria.*

444. Triangulum omne ſenis conſtat partibus, tribus nimirum lateribus, ac totidem angulis; quarum ſi tribus datis tres reliquae quaerantur, triangulum *reſolui* dicitur, et pars geometriae eam reſolutionem docens *trigonometria* appellatur.

445. Coroll. Quoniam triangula vel rectis, vel curuis lineis continentur, patet duplicem eſſe trigonometriam. *Plana* vocatur, quae agit de triangulis in plano quopiam lineis rectis terminatis: *ſphaerica* autem refertur ad triangula, quae in globi cuiusdam, ſeu ſphaerae ſuperficie fiunt a circulorum maximorum arcubus. Nos hoc loco de plana tantum agemus.

446. Perſpicuum eſt angulos trianguli, ſeu arcus eoſdem metientes non eſſe lateribus proportionales, nec poſſe proinde laterum ope directe inueſtigari: quare angulis et arcubus ſubrogantur lineae quaedam rectae lateribus proportionales, quae arcus et angulos repraeſentant, eorumque quaſi vice in calculo funguntur, vnde et *functiones* adpellantur, quas iam ſingulatim explicabimus.

Fig. 58. 447. Si ex arcus cuiuspiam AB extremo alterutro B demittatur perpendicularis BD in diametrum tranſeuntem per alterum extremum A, erit ea *ſinus rectus* eiuſdem arcus AB, vel anguli ACB; pars vero diametri AD inter eum ſinum, et arcum intercepta, erit *ſinus verſus* eiuſdem. Si praeterea per extremum arcus ducatur tangens AT, donec occurrat rectae CT ex centro per alterum arcus extremum ductae, erit AT *tangens*, CT autem *ſecans* eiuſdem arcus AB, vel anguli ACB.

448. Coroll. 1. Duo ergo arcus AB et B*a*, qui ſimul efficiunt ſemicirculum; aut duo anguli contigui ACB, *a*CB eoſdem habent ſinus rectos, tangentes, et ſecantes. Nam ſinus arcus *a*B, vel anguli *a*CB eſt BD, vel *ad*, tangens AT vel *at*; ſecans CT vel C*t* (447); eſt vero ob triangula CBD, C*ad*, item CAT, C*at* aequalia (377) BD = *ad*, AT = *at*, CT = C*t*.

449. Coroll. 2. Si puncto B ab A ſucceſſiue digrediente creſcat arcus AB, et angulus ACB, patet ſinum quoque DB creſcere, vti et ſinum verſum AD, et reliquas functiones. Quum autem punctum B ad M peruenerit, arcus AB

abibit in quadrantem AM, et angulus ACB in rectum ACM, ſinus vero BD congruet cum radio MC, eritque omnium maximus, vnde et *ſinus totus* vocatur; ſimiliter ſinus verſus AD congruet cum radio AC; at tangens AT cum ſecante CT euadet parallela, neque concurret vſpiam, hinc ambae infinitae erunt.

450. COROLL. 3. Sinus rectus eſt dimidium chordae arcus dupli. Nam arcus AB duplus eſt BAG (322), ac eius chorda BG; eſt vero BD $= \frac{1}{2}$ BG (cit). Eodem modo patet eſſe $ad = \frac{1}{2} ag$.

451. COROLL. 4. Sinus anguli vel arcus 30° aequatur dimidio radio. Sit enim BA = 30°, erit BAG = 60° (322); hinc eius chorda BG eſt latus hexagoni regularis, adeoque aequatur radio (399); cum ergo ſinus BD ſit $= \frac{1}{2}$ BG (450), patet eum aequari dimidio radio.

452. COROLL. 5. Tangens anguli, vel arcus 45°, aequatur radio. Sit enim angulus ACB = 45°, erit etiam angulus ATC = 45° (362), et hinc AT = AC (369).

453. Id quod arcui cuipiam deeſt ad ſemicirculum, vel angulo ad duos rectos, dicemus eiuſdem *ſupplementum*; differentiam autem arcus a quadrante, et anguli a recto, ſiue deinde ab ipſo deficiat, ſiue ipſum excedat, vocabimus eiuſdem *complementum*. Vnde ſinus, tangens, ac ſecans complementi arcus, vel anguli eſt eiuſdem *coſinus*, *coſecans*, et *cotangens*. Ita arcus *a*B eſt ſupplementum reſpectu arcus AB; BM eſt complementum arcuum AB et *a*B; BI eſt eorundem coſinus, KM cotangens, CK coſecans. En tabellam, quae memoriam adiuuet.

| | | |
|---|---|---|
| BD | Sin. rect. | |
| AT | Tang. | |
| CT | Secans. | |
| AD | Sin. verſ. | Arcus AB vel |
| BI = DC | Coſinus. | anguli ACB |
| MK | Cotang. | |
| CK | Coſecans | |
| MI | Coſin. verſ. | |

454. COROLL. 1. Quadratum radii aequatur ſummae quadratorum ſinus recti et coſinus: item differentiae quadratorum ſecantis, et tangentis. Eſt enim $CB^2 = CD^2 + BD^2$, et $CA^2 = CT^2 - AT^2$ (433).

455. COROLL. 2. Idem radii quadratum aequatur facto e coſinu, ac ſecante; item facto ex tangente, et cotangente. Nam ob ſimilia triangula CDB, CAT, eſt CD: CB = CA ſeu CB: CT, et hinc $CB^2 = CD \times CT$. Et cum in triangulis CAT, CMK praeter angulos rectos A et M aequentur alterni TCA, CKM, eſt AT CA = CM ſeu CA: MK, et hinc $CA^2 = AT \times MK$.

456. COROLL. 3. Si ergo duo quiuis eiuſdem circuli arcus ſumantur, erunt facta ex tangente et cotangente in vtroque aequalia quadrato radii, adeoque etiam inter ſe. Soluendo igitur ambo facta in proportionem patebit, tangentes duorum quorumuis arcuum eſſe in ratione reciproca cotangentium (204).

457. COROLL. 4. Cum ſit $CT^2 = CA^2 + AT^2$ (433), palam eſt quadratum ſecantis aequari quadratis radii ſimul, et tangentis.

458. COROLL. 5. In quouis arcu AB eſt CD ſeu BI: BD = CA: AT, ſeu coſinus ad ſinum, vt radius ad tangentem. Item BD: BC = AT: TC, ſeu ſinus ad radium, vt tangens ad ſecantem.

459. COROLL. 6. Si radius CA vtcunque mutetur, functiones omnes arcuum ſimilium, vel aequalium angulorum in eadem ratione mutantur, adeoque mutuam ad ſe inuicem rationem retinent. Nam vtcunque aucto, vel diminuto radio CA triangula omnia eoſdem retinebunt angulos, et hinc ratio radii, et functionum non turbabitur.

460. COROLL. 7. In quouis triangulo rectangulo ABC ſi hypotenuſa ſumatur pro radio, ſeu ſinu toto, quiuis cathetorum erit ſinus anguli ſibi oppoſiti, et coſinus adiacentis acuti: nimirum AB erit ſinus anguli C, coſinus anguli A: BC ſinus anguli A, coſinus anguli C. Quare ſinus totus eſt ad ſinum alterutrius anguli acuti, vt hypotenuſa ad latus eidem angulo oppoſitum: et ſinus totus eſt ad coſinum anguli acuti vtriuſ- Fig. 59.

libet, vt hypotenuſa ad latus eidem angulo adiacens.

461. Coroll. 8. Sin autem alteruter cathetus ſumatur pro radio, ſeu ſinu toto, alter cathetus ſit tangens, hypotenuſa ſecans anguli acuti radio adiacentis: nimirum ſi CB eſt radius, AB eſt tangens, AC ſecans anguli C; ſi vero AB ſit radius, BC eſt tangens, AC ſecans anguli A. Eſt adeo ſinus totus ad tangentem vnius anguli acuti, vt latus eidem angulo adiacens ad oppoſitum: et ſinus totus ad ſecantem vnius ex angulis acutis, vt latus eidem adiacens ad hypotenuſam,

462. Theorema. *In quouis triangulo latera ſunt vt ſinus angulorum iisdem oppoſitorum.*

Demonstr. Poteſt enim cuiuis triangulo circumſcribi circulus (324), et tunc latera euadunt chordae ſubtendentes arcus duplos eorum, qui metiuntur angulos oppoſitos (342): quare lateris cuiusuis dimidium erit ſinus anguli oppoſiti (450); cum ergo dimidia ſint vti tota (210), patet latera fore vt ſinus angulorum oppoſitorum.

Fig. 60. 463. Coroll. Si angulus quiſpiam A obtuſus fuerit in triangulo ABC, ductis BD et CD angulus D erit ſupplementum anguli A (346), adeoque ambo eundem habent ſinum: eſt autem per demonſtr. $\frac{1}{2}$BC ſinus anguli D; igitur etiam eſt ſinus anguli A.

Fig. 61. 464. Theorema. *In quouis triangulo* ABC *ſumma duorum quorumuis laterum* AC + AB *eſt ad eorundem differentiam* AC — AB *vt tan-*

*gens ſemiſummae angulorum* B *et* C *iisdem oppoſitorum ad tangentem ſemidifferentiae eorundem.*

Demonstr. Latere minore AB tanquam radio centro A deſcribatur circulus, latus vero alterum CA producatur, dum occurrat peripheriae in D, ducaturque per puncta D et B recta indefinita DF, cui occurrat in F recta CF chordae BE parallela; erit angulus DBE (345), adeoque etiam angulus DFC rectus (309), et hinc DF ad FC perpendicularis.

Hiſce poſitis erit CA + AB = CA + AD = CD ſumma laterum; CA — AB = CA — AE = CE differentia eorundem: angulus *o* externus erit ſumma angulorum ABC, ACB (367), adeoque $\frac{1}{2}o$ = DEB (343) = DCF (309) erit eorundem ſemiſumma: quia vero angulus ACB < ABC (368), conſtabit ACB ex ſemiſumma demta ſemidifferentia (168 ex. 2).; atqui conſtat ex ACF — BCF, et ACF eſt ſemiſumma: ergo BCF eſt ſemidifferentia. Igitur ſi CF ſumatur pro radio, erit FD tangens ſemiſummae DCF, et FB tangens ſemidifferentiae BCF (461); eſt autem ob BE et FC parallelas, DC : DE = DF : DB (405), et hinc DC : DC — DE = DF : DF — DB (205), hoc eſt, DC : EC = DF : BF.

465. Theorema. *Si in triangulo quouis* ABC *in latus maximum* BC *demittatur ex angulo oppoſito* A *perpendicularis* AM, *quae ſemper intra triangulum cadet* (365), *erit latus maximum* BC *ad ſummam reliquorum* CA + AB, *vt eorundem* Fig. 62.

*differentia* CA — AB *ad differentiam ſegmentorum baſeos* MC — MB.

DEMONSTR. Centro A latere minimo AB deſcribatur circulus, erit producto, vt ante, latere CA ſumma laterum = CD, differentia = CE; praeterea MB = MN (322), et hinc CM — MB = CM — MN = CN, ſeu CN eſt differentia ſegmentorum baſeos. Eſt vero CB: CD = CE: CN (422).

466. COROLL. 1. Segmentum baſeos maius MC ſemper adiacet lateri maiori AC. Eſt enim $AC^2 = MC^2 + AM^2$, et $AB^2 = MB^2 + AM^2$ (433); ſi ergo AC > AB, etiam $MC^2 + AM^2 > MB^2 + AM^2$, et hinc $MC^2 > MB^2$, adeoque MC > MB.

467. COROLL. 2. Si AB = AC, differentia laterum, et ſegmentorum baſeos nulla eſt: ſin autem AB = BC, vel AC = BC, pro latere maximo aſſumi poteſt vtrumlibet aequalium laterum.

SCHOLION. Ex hiſce theorematis fluit triangulorum reſolutio, ac functionum omnium inuentio. Verum vt hae functiones in promtu ſemper eſſent, arcubusque et angulis ſubſtitui poſſent, neceſſe fuit concinnare tabulas quaſdam, in quibus functiones ſingulorum graduum, atque minutorum ſaltem primorum continerentur, quae *tabulae ſinuum*, vel *canones functionum* adpellantur. Satis autem eſt tabulas id genus conſtruere vſque ad arcum, aut angulum 90°; nam poſt

hunc, vt vidimus, eaedem iterum functiones redeunt. In his concinnandis radius, ſeu ſinus totus ponitur = 1 adiectis ſeptem, vel pluribus zeris eum in finem, vt functiones in fractionibus eo accuratius determinari poſſint, quemadmodum diximus de logarithmorum conſtructione. Quare functiones inueſtigare aliud non eſt, quam inuenire, quotnam eiuſmodi particulas functio vnaquaeque habeat, in quas radius diuiſus concipitur: et quia radius quiuis ſiue maior, ſiue minor in eundem partium aequalium numerum diuiditur, vti peripheria circuli cuiuſuis in eundem graduum numerum, patet particulas maioris radii maiores eſſe, quam minoris. Hinc tabulae ſinuum, in quibus exhibetur, quotnam ex illis radii particulis functio quaelibet contineat, non exhibent abſolutam, ſed tantum comparatiuam earum magnitudinem, ſiue ſolam ad radium proportionem, quae ſufficit ad reſolutionem triangulorum, vti adparebit in ſequentibus. Quodſi functiones computatae ſint pro radio in partes plures diuiſo, eaedem facile eruentur pro quouis alio radio in partes pauciores diuiſo (459): e. g. datis functionibus pro radio 10000000 inuenientur eaedem pro radio 100000, ſi e datis illis duae poſtremae notae amputentur; eſt enim primus ille radius ad hunc, vt illae datae functiones ad eaſdem duabus poſtremis notis multatas, ſicuti perſpicuum fiet proportiones ipſas inſtituenti. Tabulae huiuſmodi compluribus methodis confieri poſſunt, et iam confectae proſtant: nos viam computandi compen-

diariam cum Boſcouichio hiſce problematis complectemur.

468. PROBLEMA. *Data tangente inuenire ſecantem, et ſinum.*

RESOLUT. E ſumma quadratorum radii et tangentis extracta radix quadrata dabit ſecantem (454): et quia eſt ſecans ad tangentem vt radius ad ſinum (458), ſinus innoteſcit.

Fig. 63. 469. PROBLEMA. *Datis tangentibus* AT *et* AV *duorum arcuum* AB *et* AD *quadrante minorum inuenire tangentem* AX *arcus* AE *medii arithmetice proportionalis.*

DEMONSTR. Datis tangentibus AT et AV innoteſcunt ſecantes CT et CV (468). Iam ob arcus BE=DE recta CX bifariam ſecat angulum TCV; vnde habetur CT : CV = TX : XV (411), et componendo CT + CV : CV = TX + XV : XV (205): ſi ergo XV inuenta addatur datae tangenti minori AV, obtinebitur tangens quaeſita AX.

470. COROLL. 1. Si punctum D abeat in A, erit AV = *o*, et CV = CA, TV = TA; adeoque prior proportio abibit in hanc: CT + CA : CA = AT : AX, quae continet ſolutionem problematis, in quo data tangente alicuius arcus quaeratur tangens dimidii eiuſdem; nam tunc punctum E erit in medio arcus AB.

471. COROLL. 2. Si punctum B abeat in H, CT et VT euadent infinitae, hinc CT + CV = TV, ſeu TX + XV: ergo in proportione n. 469 etiam CV = XV: hinc ſi ſecans arcus minoris CV addatur tangenti minori datae AV, habebitur tangens quaeſita AX.

472. COROLL. 3. Si et B abeat in H, et D in A, erit arcus medius proportionalis AE $= 45°$, adeoque eius tangens $AX = CA$ (452).

473. PROBLEMA. *Datis functionibus duorum arcuum, quorum differentia perquam exigua ſit, inuenire functionem arcus cuiusuis intermedii.*

RESOLUT. Fiat haec proportio: vt differentia arcuum datorum ad differentiam arcus minoris et intermedii, ita differentia datarum functionum ad differentiam, quae eſt inter functionem arcus minoris, et intermedii; inuenta haec differentia addatur functioni arcus minoris ſi creſcentibus arcubus functio creſcit, id eſt, ſi functio ſit ſinus, tangens, aut ſecans; dematur, ſi decreſcit, id eſt, ſi functio ſit coſinus, cotangens, vel coſecans.

DEMONSTR. Referant enim rectae AB et AD datos duos arcus, ac perpendiculares BN et DL in caſu 1 exprimant functiones creſcentibus arcubus creſcentes, in caſu 2 decreſcentes, ſitque arcus intermedius AE, eius functio quaeſita EM. Erunt extrema functionum creſcentium, vel decreſcentium puncta L, M, N in linea quapiam continua, quae ſi curua ſit, arcus exiguus LN pro recta haberi poterit; hinc ducta LK parallela ad AB erit $LK : LI$, ſeu $DB : DE = NK : MI$, hoc eſt, differentiae arcuum erunt vt differentiae functionum. Porro MI in caſu primo addi debet ad LD, vt habeatur EM, in ſecundo demi. Fig. 64.

SCHOLION. Horum problematum ope functiones omnium arcuum, et angulorum inueniri poſſunt determinato radio in particulis e. g. 10000000: ſufficit autem eas computare vſque ad arcum 45°: cum enim ceteri vſque ad 90° ſint horum complementa, functiones eorum facile eruuntur per n. 454, 455, 456, 458. Inuentis functionibus reperiuntur earum logarithmi per ea, quae de logarithmis alibi tradidimus. Tabulae porro, in quibus functiones cum ſuis logarithmis inſcribuntur, ſex habere columnas debent: in quarum prima ſcribuntur gradus, et minuta prima; in ſecunda ſinus; in tertia tangentes; in quarta ſecantes correſpondentes; in quinta logarithmi ſinuum; in ſexta logarithmi tangentium. Secantium logarithmi non apponuntur, nam e logarithmis ſinuum nullo negotio eliciuntur: cum enim quadratum radii diuiſum per coſinum exhibeat ſecantem (455), ſatis erit e duplo logarithmo radii (242) ſubtrahere logarithmum coſinus (241) vt ſecantis logarithmus obtineatur. Arcus autem in pagina ſiniſtra tabulae incipiunt a 0°, et deſcendendo continenter creſcunt vſque ad 45°; at in pagina dextra initium ſumunt a 90°, et perpetuo decreſcunt vſque ad 45°: ita fit, vt cuiuis arcui inſcripto in vna pagina reſpondeat e regione in altera eius complementum, adeoque etiam coſinus, cotangens, et coſecans. Sed iam ad vſum ipſarum tabularum veniamus.

474. PROBLEMA. *Dato quouis arcu, aut angulo inuenire ope tabularum functionem eidem reſpondentem.*

Resolut. 1) Si datus arcus quadrante, aut datus angulus recto maior non fuerit, ſolosque gradus, et minuta prima continuerit, quaeratur in prima columna paginae ſiniſtrae, vel dextrae, aderit in eadem pagina eiuſdem ſinus, tangens, ac ſecans; in altera e regione coſinus, cotangens, et coſecans.

2) Si arcus quadrante, vel angulus recto maior fuerit, ſubtrahatur a 180°, et quaerantur, vt ante, functiones arcus, vel anguli reſidui; eaedem erunt functiones etiam arcus, vel anguli dati (448).

3) Si arcus vel angulus praeter gradus, et minuta prima etiam ſecunda contineat, quaeratur in tabulis functio arcus proxime maioris, et proxime minoris, capiaturque earum differentia, tum fiat, vt differentia duorum arcuum, vel angulorum proximorum in tabulis, nempe 1′, ſeu 60″ ad differentiam arcus vel anguli dati et proxime minoris in tabulis, ſeu ad minuta ſecunda, quae datus arcus, vel angulus continet, ita differentia functionum arcubus maiori et minori in tabulis reſpondentium ad differentiam functionum arcubus dato et proxime minori in tabulis reſpondentium (473): inuenta haec differentia addatur functioni arcus, aut anguli proxime minoris, ſi ſinus tangens, aut ſecans quaeritur; dematur, ſi coſinus, cotangens, aut coſecans quaeritur, et obtinebitur functio quaeſita (cit.).

E. g. quaeratur ſinus reſpondens angulo 30°, 5′, 8″. Angulorum proxime maioris in tabulis 30°, 6′, et proxime minoris 30°, 5′ ſinus ſunt 5015108, et 5012591, quorum differen-

tia eſt 2517; fiat ergo 60″: 8″ = 2517 : x, erit x = 336 quam proxime, quod additum ſinui 30°, 5′ exhibebit ſinum 5012927 reſpondentem angulo 30°, 5′, 8″.

475. PROBLEMA. *Data functione inuenire arcum, vel angulum eidem reſpondentem.*

RESOLUT. 1) Si data functio reperiatur in tabulis, habebitur etiam e regione in columna prima arcus, vel angulus eidem reſpondens.

2) Si non adſit in tabulis, capiatur differentia functionum proxime maioris, et minoris in tabulis, tum fiat, vt differentia harum functionum ad differentiam, qua data functio ſuperat proxime minorem in tabulis, ita 60″, ſeu differentia duorum arcuum vel angulorum proximorum in tabulis, ad numerum minutorum ſecundorum addendorum arcui vel angulo reſpondenti functioni minori, ſi ea ſit ſinus, tangens, aut ſecans; vel demendorum, ſi ſit coſinus, cotangens, vel coſecans (473): arcus ita repertus, vel angulus, aut etiam eius ſupplementum erit is, cui data functio reſpondet.

E. g. quaeratur arcus, vel angulus reſpondens ſinui 2985411 in tabulis haud comparenti. Sinus proxime maior in tabulis eſt 2987632 reſpondens arcui 17°, 23′; proxime minor eſt 2984856 reſpondens arcui 17°, 22′: fiat ergo, vt differentia horum ſinuum 2776 ad 555 differentiam ſinus dati, et proxime minoris in tabulis ita 17° + 23′ — 17° — 22′, ſeu 60″ ad x; erit x = 12″, adeoque arcus, vel angulus, cui ſinus datus reſpondet, eſt 17°, 22′, 12″, vel eius ſupplementum 162°, 37′, 48″. Hinc

ſpecies arcus, vel anguli quaeſiti aliunde iam nota eſſe debet.

476. PROBLEMA. *Triangulum rectangulum* ABC *reſoluere.* Fig. 65.

RESOLUT. Ex n. 460 et 471 formulae ſequentes eruuntur:

| Data | Quaerend. | Reſolutio Problematis. |
|---|---|---|
| AB, AC | B | AB : AC = Sin. tot. ad tang. B |
| | BC | Sin. B : AC = Sin. tot. ad BC. |
| | C | AC : AB = Sin. tot. ad tang. C |
| AB, BC | C | BC : Sin tot. = AB : Sin. C. |
| | B | Habetur dat. rect. A. et inuent. C |
| | AC | Sin. tot. ad BC = Sin. B : AC. |
| AC, BC | B | BC : Sin. tot. = AC : Sin. B. |
| | C | Habetur inuento B. |
| | AB | Sin. tot. ad BC = Sin. C : AB. |
| AB, B | C | Habetur datis recto A, et B. |
| | AC | Sin. C : AB = Sin. B : AC. |
| | BC | Sin. C : AB = Sin tot ad BC. |
| BC, B | C | Habetur vt ante |
| | AB | Sin. tot. ad BC = Sin. C : AB |
| | AC | Sin. tot. ad BC = Sin. B : AC. |

Omnia problemata trianguli rectanguli ad haſce formulas reduci poſſunt, quorum pleraque etiam ope tangentium reſolui queunt, in quibus nos ſinus adhibuimus.

477. PROBLEMA. *Triangulum* ABC *non rectangulum reſoluere.* Fig. 66.

RESOLUT. Ex n. 462, 464, et 465 formulae ſequentes eruuntur:

| Data | Quaerend. | Reſolutio Problematis |
|---|---|---|
| AB | A | BA : Sin. C = BC : Sin. A, vel ad eius ſupplem. |
| BC | B | Habetur inuento A |
| C | AC | Sin. C : AB = Sin. B : AC |
| A | C | Habetur datis A et B |
| B | AB | Sin. B : AC = Sin. C : AB |
| AC | BC | Sin. C : AB = Sin. A : BC |
| AB | A | BC + BA : BC — BA = tang. $\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$C : tang. $\frac{1}{2}$A — $\frac{1}{2}$C : inuenta ſemidifferentia addita ad ſemiſum. $\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$C dat angulum A. |
| BC | C | Inuenta ſemidifferentia ſubtracta ab $\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$C dat angulum C |
| B | AC | Sin. C : AB = Sin. B : AC. |
| AB | C | BC : AC + AB = AC — AB : DC — DB : ſi iam dimidio inuentae differentiae addatur dimidia baſis, obtinetur ſegmentum |
| BC | B | maius DC, quod a tota baſi ablatum relinquit ſegmentum minus BD. Hinc in triangu- |
| AC | A | lis rectangulis ADC, ADB reperiuntur anguli C et B, atque adeo innoteſcit etiam angulus A. |

Scholion. Si in triangulo quopiam tres duntaxat anguli dentur, innoteſcunt quidem eorundem ſinus, adeoque inuenitur etiam proportio, quam habent latera quaeſita ad inuicem (462): at ipſa laterum quantitas abſoluta cognoſci nequit, niſi vnum ſaltem eorum detur.

CA-

# CAPVT VI.

## *De nonnullis Praxibus geometricis, et trigonometricis.*

478. PROBLEMA. *Scalam geometricam conſtruere, quae contineat tres gradus progreſſionis decuplae.* Fig. 67.

RESOLUT. Ad rectam AC erigatur perpendicularis AB, quae diuidatur in partes aequales 10: ex puncto B ducatur BD parallela ad AC, ac in vtraque hac linea capiantur partes aequales 10, quarum interuallum AE vel BG transferatur in F et I, in C et D etc. quoties fieri poteſt. Puncta diuiſionum in rectis AE et BG connectantur rectis transuerſis a 9 ad 10, ab 8 ad 9, a 7 ad 8 etc. ductis; tum per puncta E et G, F et I, C et D ducantur rectae EG, FI, CD. Denique per omnia diuiſionis rectae AB puncta ducantur parallelae ad rectam AC; erit ſcala perfecta, in qua rectae AE, A9, 99 ſunt in progreſſione decupla decreſcente.

DEMONSTR. Eſt enim ex conſtr. recta A9 pars decima rectae AE, vti et recta G1 rectae BG, quod vero eiuſdem A9 pars decima ſit lineola 99, facile oſtenditur; ſimilia enim ſunt triangula B99, BA9 ob angulum B communem, et latera 99, A9 parallela; hinc B9: BA=99: A9, ſed ex conſtr. B9 eſt decima pars rectae BA: ergo etiam 99 eſt decima pars rectae A9. Eodem

modo patet rectam 88 eſſe duas decimas, 77 tres decimas, 66 quatuor decimas etc. partes rectae A9:

479. Coroll. Si ergo recta AE repraeſentet perticam 10 pedes habentem, recta A9 repraeſentabit pedem; recta 99 vnum digitum, 88 duos, 77 tres etc.

480. Problema. *Vnica circini apertura deſumere ex ſcala tres gradus progreſſionis geometricae, e. g. 2 pedes, 3 digitos, 7 lineas.*

Resolut. In triangulo 1EG inter lineolas transuerſas baſi G1 parallelas quaere lineolam 77: quae dabit 7 lineas: vltra hanc accipe 3 decades vſque ad O, quae dabunt 3 digitos; citra vero in eadem recta cape duas centenas vſque ad H, quae dabunt 2 pedes: apertura ergo circini OH tres petitos gradus comprehendit.

481. Coroll. Quodſi detur linea quaepiam ad ſcalam adplicanda, vt innoteſcat, quotnam eiuſdem partes, et quales contineat, capiatur data recta circino, tum vnum circini crus ſucceſſiue adplicetur ad diuiſiones rectae EG, vel FI, vel CD etc. e. g. ad punctum H, ita vt crus alterum in eadem recta H7 accurate incidat in aliquod diuiſionis punctum e. g. in O, ita innoteſcent partes ſcalae in data linea contentae: nempe in noſtro caſu recta HO continet duas centenas, tres decades, ſeptem vnitates. Quodſi tota recta circino comprehendi nequeat, capiatur pars eius dimidia, tertia, quarta etc.: ſi enim conſtiterit quotnam ſcalae partes ea pars contineat, facile innoteſcet numerus partium ſcalae in tota recta contentarum.

4**. PROBLEMA. *Metiri diſtantiam duorum locorum* A *et* B *acceſſorum.* Fig. 68.

RESOLUT. 1) Ope menſulae geometricae. Menſula obducatur charta candida probe extenſa, et collocetur ſitu horizontali in loco quopiam C, vnde locus vterque cerni, et accedi poſſit. Tum in puncto menſae C ſtationis loco imminente defigatur perpendiculariter acicula, et per regulam pinnulis inſtructam, quae *dioptra* dicitur, fiat collineatio verſus loca A et B, et ducantur in menſula rectae indefinitae verſus eadem, in quas e ſcala transferantur diſtantiae locorum CA, et CB, nempe prior transferatur in C*a*, poſterior in C*b*, iunganturque puncta *a* et *b* recta *ab*; haec ad ſcalam adplicata indicabit diſtantiam AB. Eſt enim C*a*: CA = *ab* : AB (416, 408): ſicut ergo C*a* ſuis particulis exhibet perticas, pedes, digitos etc. diſtantiae CA, ita *ab* exhibebit perticas, pedes, digitos etc. diſtantiae AB.

2) Ope quadrantis. Capiatur quadrans in gradus 90, vel ſemicirculus in 180 accurate diuiſus, in cuius extremo fixus ſit radius pinnulis inſtructus, radius alter circa centrum mobilis ſuas item pinnulas, ſeu dioptras habeat. Collocetur hoc inſtrumentum ſitu horizontali in loco C, ita vt centrum ſtationi directe immineat; tum per radium fixum fiat collineatio verſus locum A, per radium mobilem verſus B, arcus inter duos radios interceptus indicabit angulum ACB (282): menſuratis igitur ope catenae, vel funis diſtantiis AC et BC, inferatur: vt ſumma laterum AC et BC ad eorundem differentiam, ita tangens ſemiſummae angulorum A et B, quae datur inuento

T 2

angulo C (363), ad tangentem ſemidifferentiae eorundem (464), cui in tabulis reſpondebit ipſa ſemidifferentia, quae addita ſemiſummae exhibebit angulum A vel B maiori lateri oppoſitum. Deinde inferatur: vt ſinus anguli nunc inuenti ad latus ſibi oppoſitum, ita ſinus anguli C ad latus oppoſitum AB (462).

Fig. 69. 483. Problema. *Metiri diſtantiam duorum locorum A et B, quorum vnus tantum A poſſit accedi.*

Resolut. 1) Ope menſulae geometricae. Eligatur ſtatio in C, vnde locus vterque cerni, A vero etiam accedi poſſit, loceturque illic menſula ſitu horizontali, ac fiant, vt ſupra, collineationes, et ducantur rectae indefinitae. Deinde diſtantia CA ope catenae menſurata e ſcala transferatur ex C in *a*: atque acicula ex C extracta defigatur in *a*, haſtaque conſpicua in C erecta transferatur menſula ad locum A, et collocetur ſitu horizontali ita, vt punctum *a* loco A directe immineat, recta vero *a*C cum AC in directum iaceat. Fiat denique penes aciculam collineatio verſus locum B, et ducatur recta, quae rectam e ſtatione C verſus B ductam ſecet in puncto *b*; recta A*b* ſcalae adplicata indicabit ſuis particulis numerum perticarum, pedum etc. diſtantiae AB. Nam triangula ABC, A*bc* habent duos angulos communes, nempe A, et C ad *c* translatum: ergo tertius B = *b* (364); et hinc A*c*: AC = A*b*: AB (408); ſicut ergo A*c* ex conſtr. ſuis particulis repraeſentat diſtantiam AC, ita A*b* repraeſentabit diſtantiam AB.

2) Ope quadrantis. Factis vti ſupra collineationibus menſurentur anguli ACB, et CAB, innoteſcet hoc ipſo tertius B (363): ſi ergo ope catenae menſuretur latus AC, ſtabit haec proportio: vt ſinus anguli B ad latus oppoſitum AC, ita ſinus anguli C ad latus oppoſitum AB (462).

484. PROBLEMA. *Metiri diſtantiam duorum locorum* A *et* B, *quorum neuter poſſit accedi.* Fig. 70.

RESOLUT. 1) Ope menſulae geometricae. Electis duabus ſtationibus C et *d*, e quarum vtraque cerni locus vterque poſſit, collocetur menſula in C, et factis rite collineationibus ducantur rectae indefinitae verſus A, B, et *d*. Deinde menſurata diſtantia C *d* transferatur e ſcala ab acicula C vſque in D, ac acicula ex C extracta defigatur in D, menſulaque ad ſtationem *d* translata ſic collocetur in ſitu horizontali, vt acicula quidem ſtationi *d* directe immineat, recta vero CD cum C*d* congruat. Denique penes aciculam rurſus fiant verſus C, A, et B collineationes, et ducantur rectae prioribus occurrentes in punctis *a* et *b*, quorum interuallum *a b* ad ſcalam adplicatum indicabit diſtantiam AB. Nam ob angulum *d* communem, et *c* ex C translatum, ſimilia ſunt triangula *d c a*, *d*CA; hinc *d c*: *d*C = *c a*: CA; et eadem ex cauſſa ſimilia ſunt triangula *d c b*, *d*CB; hinc *d c*:*d*C = *c b*:CB, ergo etiam *c a*:CA = *c b*: CB, adeoque etiam triangula *a c b*: ACB ſimilia ſunt (416): ſimilia ergo ſunt etiam polygona *d c a b*, *d*CAB (439): ergo habetur haec proportio: *d c*: *d*C = *a b*: AB.

2) Ope quadrantis. Menſurentur, vt ſupra, anguli AC*d*, BC*d*, vnde innoteſcet etiam ACB:

menſuretur item ope catenae latus C*d*, ac in ſtatione *d* anguli B*d*C, A*d*C. Deinde fiat imprimis in triangulo BC*d*, in quo menſuratis angulis C et *d*, innoteſcit tertius B, haec proportio: vt ſinus anguli B ad latus oppoſitum C*d*, ita ſinus anguli *d*, vel eius ſupplementi, ſi obtuſus eſt, ad latus oppoſitum BC. Eodem calculo inuenitur latus AC in triangulo A*d*C. Denique in triangulo ACB habitis iam praeter angulum C etiam lateribus BC et AC, fiat reſolutio vt ſupra (482).

Fig. 71. 485. Coroll. Si loca inacceſſa A et B eiusmodi fuerint, vt nequeant inueniri duae ſtationes C et D, e quibus cerni ambo poſſint, eligatur ſtatio aliqua C, ex qua cerni poſſit locus A, et altera D, ex qua cerni poſſit locus B, menſureturque harum ſtationum diſtantia CD. Eligatur rurſus ſtatio quaepiam E, ex qua cerni queat locus A, et menſuretur diſtantia CE vna cum angulis ACE, AEC, et inueniatur diſtantia AC (483), atque ita concipiendo radium viſualem AD nota erunt in triangulo ACD latera CA et CD vna cum angulo intercepto C, qui menſurari poteſt; hinc autem innoteſcet latus AD, et angulus ADC (482). Eadem operatione in altera parte inſtituta reperietur DB. Si ergo ex angulo menſurato CDB tollatur inuentus ADC, habebuntur in triangulo ADB latera AD et DB vna cum angulo intercepto D; vnde erui poteſt AB (cit.).

Scholion. Si in poſtremis duobus problematis diſtantia AB nimis magna fuerit, e. g. duorum, aut trium milliarium, neceſſe eſt etiam diſtantiam AC in Fig. 69, vel diſtantiam C*d* in 70 eſſe maiorem, e. g. medii, vel integri milliaris, quae

cum ſaepe ob varia impedimenta ope catenae menſurari haud poſſit, determinari poterit per n. 482, vel per n. 483.

486. Problema. *Metiri altitudinem acceſſam* AB. Fig. 72.

Resolut. 1) Ope vmbrae. Si planum circa datam altitudinem fuerit ſatis horizontale, baculus notae altitudinis *ba* defigatur in plano a ſole colluſtrato perpendiculariter, menſureturque tum eius, tum altitudinis quaeſitae vmbra eodem tempore, ac inferatur: vt vmbra baculi *bc* ad vmbram altitudinis BC, ita altitudo baculi ad altitudinem quaeſitam. Nam triangula *bac*, BAC ſimilia ſunt ob angulos ad *b* et B rectos, ac ad *c* et C aequales eidem angulo eleuationis ſolis ſupra horizontem.

2) Ope vnius baculi. Cape baculum MN, eius praeciſe longitudinis, vt terrae perpendiculariter infixus oculi tui altitudinem exaequet. Tum recede ab altitudine menſuranda tamdiu, donec ſupinus in terra iacens in ſitu NC per cacumen baculi M ad calces pedum perpendiculariter infixi videas punctum A; erit enim tunc BC = AB. Nam ob angulum ad C communem, et ad N ac B rectos ſimilia erunt triangula MNC, ABC; vnde NC : MN = BC : AB; atqui ex conſtr. NC = MN: ergo etiam BC = AB.

3) Ope duorum baculorum. Interuallo D*d* ante menſurato infige duos baculos CD et *cd* ita, vt per apices *c* et C videas punctum A; erit F*c* ſeu D*d* (383) ad E*c* = FC : EA, ob ſimilia, vt ante, triangula *c*FC, *c*EA. Si ergo menſures differentiam baculorum FC, et diſtantiam E*c* ſeu B*d*, inuenies partem altitudinis AE, cui ſi ad- Fig. 73.

das $cd$ = EB (cit.), habebis integram altitudinem AB.

Fig. 74. 4) Ope menſulae geometricae. Erigatur menſula in ſtatione D verticaliter, ita vt latus eius FG parallelum ſit horizonti DB: tum infixa acicula in C ducatur recta indefinita $Ce$ lateri FG parallela, et fiat immota menſula collineatio verſus apicem A, ducaturque recta indefinita ab acicula C verſus A; denique menſurata diſtantia CE ope ſcalae ex C transferatur in $e$, ac illic erigatur perpendicularis $ea$; haec ad ſcalam adplicata indicabit altitudinem AE. Nam patet ſimilia eſſe triangula $Cea$, CEA, et hinc $Ce$: CE = $ea$: EA: quare innoteſcit EA, cui ſi addatur EB, quae aequatur altitudini aciculae (383), obtinebitur AB.

5) Ope quadrantis. Quadrante verticaliter in D erecto, ita vt eius radius immobilis horizonti parallelus ſit, inueſtigetur angulus C; deinde menſuretur diſtantia CE: habebuntur in triangulo AEC praeter latus EC anguli C, et E rectus, adeoque etiam tertius A (363): fiat ergo haec proportio: ſinus anguli A eſt ad latus oppoſitum EC, vt ſinus anguli C ad latus oppoſitum AE (462), cui ſi addatur altitudo centri quadrantis, habebitur tota altitudo AB.

487. Problema. *Metiri altitudinem* AB *inacceſſam.*

Fig. 75. Resolut. 1) Ope menſulae geometricae. Collocetur menſula in ſtatione D verticaliter, vt ſupra, et penes aciculam O ducatur recta $Or$ indefinita lateri menſulae parallela, iuxta cuius di-

rectionem fiat collineatio in aliquod quaeſitae altitudinis punctum E; tum penes aciculam fiat collineatio verſus A, et ducatur recta indefinita. Ex O in $r$ transferatur e ſcala diſtantia ſtationum CD, ac relicto in D baculo transferatur menſula ad alteram ſtationem C, acicula in $r$ defixa, et ſtationi C imminente. Tum per dioptras regulae ad rectam $ro$ adplicatae reſpicienti baculus occurrat in D, et ex aduerſo occurrat punctum E, ac immota menſula fiat penes aciculam collineatio verſus A, ducaturque recta occurrens alteri e priore ſtatione verſus A ductae in puncto $a$; demiſſa ex $a$ perpendicularis $ae$ ad ſcalam adplicata indicabit partem altitudinis AE. Nam ſimilia ſunt triangula $rao$, $r$AO, item $rae$, $r$AE, ergo $ro : r$O ſeu CD $= ra : r$A; et $ra : r$A $= ae :$ AE; igitur $ro :$ CD $= ae :$ AE: inuenitur itaque AE, cui addenda eſt altitudo aciculae $=$ EB, ſi puncta B, C, D fuerint in eadem recta, et obtinebitur integra altitudo AB.

2) *Ope quadrantis.* Iisdem factis collineationibus menſurentur anguli O, et A$r$E, innoteſcet angulus A$r$O, et hinc etiam angulus $r$AO: fiat igitur: vt ſinus anguli A ad latus oppoſitum $r$O, ita ſinus anguli O ad latus oppoſitum A$r$: quare in triangulo $r$AE habebitur latus A$r$, angulus A$r$E menſuratus, et rectus E; ſtabit igitur haec proportio: vt ſinus anguli recti E ad latus oppoſitum A$r$, ita ſinus anguli A$r$E ad latus oppoſitum AE; cetera fient vt ante.

488. COROLL. Si puncta B, C, et D non ſint in eadem recta, fiat penes aciculam colli- Fig. 72.

neatio etiam verſus punctum B, et ducatur recta indefinita, cui perpendicularis *ae* producta occurrat in *b*; indicabit *ab* in ſcala totam altitudinem AB, ob ſimilitudinem ſcilicet triangulorum *aCb*, ACB. Si quadrante fiat menſuratio, facta verſus E et B collineatione reperietur angulus ECB; notus eſt praeterea rectus in E, adeoque innoteſcit tertius B; latus item CE reſolutione trianguli AEC inuentum eſt: ex his autem eruitur pars quaeſitae altitudinis EB. Poteſt etiam erui ſimul tota altitudo AB, ſi reſoluatur totum triangulum ACB, in quo praeter latus AC iam inuentum innoteſcunt anguli omnes.

Fig. 77. 489. PROBLEMA. *Areae campeſtris* ABCDEFA *libere permeabilis ichnographiam perficere, id eſt, figuram ei areae ſimilem conſtruere.*

RESOLUT. 1) Ope menſulae geometricae. Collocetur menſula ſitu horizontali in angulo quopiam areae A, e quo ad reliquos omnes angulos proſpectus pateat: tum factis penes aciculam angulo A imminentem verſus eoſdem collineationibus ducantur rectae indefinitae, in quas e ſcala transferantur diſtantiae AB, AC, AD, AE, AF ope catenae menſurandae, ac puncta *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, in quibus eae diſtantiae tranſlatae terminantur, connectantur, erit figura A*bcdef*A ſimilis areae propoſitae ABCDEFA. Nam ſingula triangula A*bc*, A*cd* etc. ſimilia ſunt ſuis correſpondentibus ABC, ACD etc. (416): ergo figura parua maiori ſimilis eſt (439). Eodem modo res peragitur, ſi menſula non in angulo, ſed intra ipſam aream vbicunque collocetur.

2) Ope quadrantis. Centro quadrantis angulo A imminente menſurentur anguli BAC, CAD DAE, EAF, item diſtantiae AB, AC, AD, AE, AF ope catenae; tum conſtructis in charta iiſdem angulis diſtantiae menſuratae transferantur e ſcala in *Ab*, *Ac*, *Ad*, *Ae*, *Af*, et puncta *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, connectantur; erit, vt ante, figura *Abcdef*A ſimilis areae propoſitae ABCDEFA. Eadem erit operandi ratio, ſi ſtatio non in angulo, ſed intra ipſam aream vbiuis conſtituatur.

490. PROBLEMA. *Areae campeſtris* ABCDEF *imperuiae ichnographiam perficere.* Fig. 73.

RESOLUT. 1) Ope menſulae geometricae. Deligantur duo anguli proximi areae propoſitae A et B, e quibus ad ſingulos angulos proſpectus pateat: collocetur menſula in primo angulo A ſitu horizontali, ac penes aciculam angulo imminentem ducantur verſus ceteros angulos rectae indefinitae. Deinde menſurata ope catenae ſtationum diſtantia AB transferatur e ſcala in *Ab*, et acicula in *b* defigatur, tum menſula translata in angulo B ſic collocetur, vt acicula eidem immineat, et iuxta rectam B*a* collineanti baculus in A relictus occurrat. Denique penes aciculam B factis verſus angulos C, D, E, F collineationibus ducantur rectae prioribus occurrentes in punctis *c*, *d*, *e*, *f*: puncta haec connexa dabunt ichnographiam B*cdefa*B. Nam ob eoſdem angulos *a* et A parallelae ſunt rectae *ac* et AC, et hinc triangula *ac*B, ACB ſimilia: eadem de cauſſa parallelae ſunt rectae *ad* et AD, *ae* et AE, *af* et AF, ac proinde ſimilia triangula *ad*B et ADB, *ae*B et AEB, *af*B et AFB: eſt ergo

in primo pari $aB$: AB $=$ $ae$: AC: in ſecundo $aB$: AB $=$ $ad$: AD, ergo $ae$: AC $=$ $ad$: AD; vnde triangula *acd*, ACD ſimilia ſunt (416): eodem modo oſtenditur ſimilia eſſe triangula *ade*, ADE, item *aef*, AEF: quare figura B*cdefa*B ſimilis eſt areae BCDEFAB (439).

2) Ope quadrantis. Factis in A et B collineationibus verſus omnes areae propoſitae angulos notentur omnes anguli in vtraque ſtatione; tum diſtantia ſtationum AB e ſcala deſumta transferatur in charta in rectam B*a*, ac in extremis B et *a* conſtituantur anguli in vna, et altera ſtatione inuenti, dabunt, vt ante puncta interſectionum *c*, *d*, *e*, *f* figuram B*cdefa*B areae propoſitae ſimilem.

491. PROBLEMA. *Ichnographiam regni, vel prouinciae ope trigonometriae perficere.*

Fig. 79. RESOLUT. Luſtratis regionis arcibus, vrbibus, ac montibus deligatur loco opportuno baſis AB eius longitudinis, quae notabilem habeat rationem ad diſtantias locorum in mappam referendorum, eaque ope problematum ſuperiorum accurate menſuretur: ab extremis autem baſeos A et B debet patere aſpectus ad complures arces, montes, vrbes, oppida etc. Tum in prima ſtatione ope quadrantis menſurentur omnes anguli, quos baſis AB efficit cum lineis verſus loca conſpicua C, D, E etc. directis, nempe anguli BAC, BAD, BAE etc. omiſſis interea angulis, qui nimis obtuſi, vel nimis acuti euaderent. Similiter explorentur in ſtatione B anguli ABC, ABD, ABE etc. In omnibus his triangulis dato latere communi AB, et angulis eidem adiacenti-

bus, reperiuntur ope ſinuum diſtantiae AC, BC; AD, BD etc. atque ita poſitio punctorum C, D, E etc. determinatur, ſi nimirum iis diſtantiis e ſcala, ad quam baſis AB adplicatur, deſumtis centris A et B fiant arcus ſeſe interſecantes. Porro vt loca omiſſa e. g. F, L etc. determinentur, aſſumatur pro baſi diſtantia AE iam inuenta, ac exploratis angulis EAF, AEF inueniantur latera AF et EF, his e ſcala deſumtis tanquam radiis ducti arcus e centris A et E deſignabunt ſua interſectione poſitionem loci F. Eodem modo aſſumta baſi BC definietur ſitus loci L, et ſic porro de aliis locis in primis ſtationibus praetermiſſis. Figura hunc in modum conſtructa conſtabit totidem triangulis ſimilibus, ac ſimiliter poſitis, quot habet ipſa regio; erit proinde eidem ſimilis.

# SECTIO II.

## DE SUPERFICIEBUS.

## CAPVT I.

### *De geneſi, et aequalitate ſuperficierum.*

Fig. 80. 492. Si concipiatur recta CD motu continuo ita deuenire ad ſitum AB, vt ſibi ſemper parallela maneat, totam parallelogrammi AD ſuperficiem ſucceſſiue conteget. Vnde tota ea ſuperficies conſtat recta CD toties poſita, quot ſunt puncta, per quae aſcendendo ſucceſſiue tranſiit, dum ad ſitum AB deueniret, ſeu quot ſunt puncta in perpendiculari CA metiente diſtantiam laterum CD et AB: eſt ergo area parallelogrammi rectanguli AD factum ex eiuſdem baſi CD in altitudinem CA.

493. Coroll. 1. Et quia quoduis parallelogrammum non rectangulum aequatur rectangulo eandem baſim, et altitudinem habenti (388), vniuerſe area cuiuſuis parallelogrammi aequalis eſt facto ex baſi in altitudinem.

494. Coroll. 2. Cumque triangulum quoduis aequetur dimidio parallelogrammo eandem baſim, et altitudinem habenti (385), area cuiusuis trianguli aequatur facto ex dimidia baſi in altitudinem, vel ex dimidia altitudine in baſim. Conf. n. 387.

495. Coroll. 3. Trapezium ABDC habens duo latera oppoſita AB et CD parallela, ducta diagonali AD reſoluitur in duo triangula ADC, ABD aequales altitudines AE et FD habentia (308); atqui area trianguli ADC eſt $= \frac{1}{2}CD \times AE$; et area trianguli ABD eſt $= \frac{1}{2}AB \times DF = \frac{1}{2}AB \times AE$ (494): ergo area vtriusque ſimul, ſeu area huiusmodi trapezii aequatur facto ex ſemiſumma laterum parallelorum $\frac{1}{2} CD + \frac{1}{2} AB$ ducta in altitudinem AE, vel FD. Fig. 81.

496. Coroll. 4. Quoniam polygonum quoduis regulare conſtat tot aequalibus, et aeque altis triangulis, quot ſunt latera (397), ſumma omnium triangulorum, adeoque area eiuſmodi polygoni aequatur facto ex dimidio omnium baſium, ſeu ex dimidia polygoni perimetro in communem triangulorum altitudinem, ſeu in perpendiculum e centro ad latus quoduis demiſſum (318).

497. Coroll. 5. Cum ergo circulus quiuis ſit polygonum regulare infinitorum laterum, in quo perpendiculum e centro ad latus demiſſum ſit ipſe radius (442), area circuli aequatur facto

ex dimidia peripheria in radium, vel ex peripheria in dimidium radium; et area ſectoris circuli aequatur facto ex dimidio arcu ſectorem terminante in radium, aut ex dimidio radio in eum arcum.

498. Coroll. 6. Hinc area circuli aequalis eſt areae trianguli habentis pro baſi rectam aequalem peripheriae circuli, pro altitudine autem eiuſdem radium (494): et area ſectoris aequalis eſt areae trianguli eandem habentis altitudinem, pro baſi vero rectam aequalem arcui ſectorem terminanti.

499. Coroll. 7. Figura quaeuis rectilinea reſolui poteſt in mera triangula: hinc area figurae inuenitur, ſi areae omnium triangulorum ſeorſim inuentae in vnam ſummam cogantur.

Scholion. Quemadmodum lineas metimur lineis, ita ſuperficies metimur ſuperficiebus, quarum magnitudo nobis ſit cognita, e. g. vnius perticae, pedis, digiti etc. Eſt autem ſuperficies vnius perticae, pedis, digiti etc. eiuſmodi ſpatium, cuius tam longitudo, quam latitudo vnam perticam, pedem, digitum etc. contineat, quod quidem facile adparet eſſe quadratum. Hinc areae cuiuſuis magnitudo tot e. g. pedum quadratorum eſſe dicitur, quot eiuſmodi quadratis perfecte contegi poteſt. Ita area parallelogrammi AD, ſi AE vnum pedem deſignat, ſex pedum quadratorum eſſe dicitur, quia impoſitis ſex pedibus quadratis, qualis eſt AI, perfecte contegitur. Vnde ſi tam baſis, quam altitudo parallelogrammi diuidantur e. g. in pedes, et per ſingula diuiſionum vnius puncta ducantur alteri

Fig. 82.

pa-

parallelae, formabunt hae tot ſeries pedum quadratorum, quot pedes ſunt in altitudine; et in quauis ſerie tot erunt pedes quadrati, quot pedes ſunt in baſi; vt adeo numerus pedum in altitudine contentorum ductus in numerum pedum baſeos exprimat numerum pedum quadratorum in area contentorum.

500. PROBLEMA. *Dato cuiuis parallelogrammo aequale quadratum conſtruere.*

RESOLUT. Inter altitudinem, quae ſit $=a$ et baſim $=b$ dati parallelogrammi quaeratur media proportionalis $=m$ (421), erit $a:m=m:b$; hinc $m^2=ab$: eſt autem $ab$ area parallelogrammi (493): ergo $m$ eſt latus quadrati eidem aequalis.

501. PROBLEMA. *Dato triangulo aequale quadratum conſtruere.*

RESOLUT. Inter dimidiam trianguli altitudinem $\frac{1}{2}a$, et baſim $b$ quaeratur media proportionalis $m$: erit $\frac{1}{2}ab=m^2$; eſt autem $\frac{1}{2}ab$ area trianguli (494): ergo $m$ eſt latus quadrati eidem aequalis.

502. PROBLEMA. *Datae cuiuis figurae rectilineae aequale quadratum conſtruere.*

RESOLUT. Transformetur data figura in aequale triangulum (391), et huic conſtruatur aequale quadratum (501).

503. PROBLEMA. *Dato circulo aequale quadratum conſtruere.*

RESOLUT. Inter dimidium circuli radium $\frac{1}{2}r$, et peripheriam $p$ quaeratur media proportionalis $m$, erit $\frac{1}{2}rp=m^2$; eſt autem $\frac{1}{2}rp$ area circuli

(497) : ergo *m* eſt latus quadrati eidem aequalis.

Scholion. Difficultas omnis in quadrando circulo huc demum recidit, vt inueniatur accurata ratio inter diametrum, et peripheriam circuli, qua inuenta, et data diametro vtique reperiri poſſet linea recta peripheriae accurate aequalis, ac proinde ope praeſentis problematis poſſet conſtrui quadratum circulo perfecte aequale, quod eſſet quadrare circulum. Ea ratio iam olim a veteribus inueſtigata fuit ope polygonorum regularium circulo inſcriptorum, et circumſcriptorum, quorum perimetri tanto magis accedunt ad circuli peripheriam, quanto magis creſcit numerus, et decreſcit magnitudo laterum. Et Archimedes quidem hac via deprehendit eam rationem eſſe fere vt 7 : 22; at ea accurate nunquam fortaſſe inuenietur, et ſi etiam inueniretur, vſui haud magno eſſet propter ingentes numeros, quibus exprimeretur. Ea, quam Metius reperit, nempe vt 113 : 355 adeo ad veram accedit, vt in peripheria, cuius diameter ſemialteram leucam continet, vna linea non aberret: quare in circulis minoribus eadem vti tuto licebit.

# CAPVT II.

## *De comparatione ſuperficierum.*

504. Theorema. *Areae quorumuis parallelogrammorum ſunt in ratione compoſita baſium, et altitudinum.*

Demonstr. Sint enim eorum altitudines A et *a*, baſes B et *b*, erunt areae vt A×B: *a*×*b* (493); eſt autem haec ratio compoſita ex A: *a* et B: *b* (189).

505. Coroll. 1. Si ergo baſes aequales ſint, erit A×B; *a*×*b*=A: *a*: ſi altitudines aequales ſint, erit A×B: *a*×*b*=B: *b* (190), hoc eſt, areae in primo caſu altitudinum, in ſecundo baſium rationem habent.

506. Coroll. 2. Cum dimidia ſint vt tota (210), triangula autem ſint dimidia parallelogrammorum eaſdem baſes, et altitudines habentium (385), praeſens theorema vna cum praecedente corollario etiam in triangulis obtinet. Conf. n. 387.

507. Coroll. 3. Si duo parallelogramma, vel triangula aequalia ſint, erit A×B=*a*×*b*, et hinc A: *a*=*b*: B (204), hoc eſt, altitudines habent baſibus reciproce proportionales. Et viciſſim ſi fuerit A: *a*=*b*: B, erit A×B =*a*×*b* (202), id eſt parallelogramma, vel triangula aequalia ſunt.

Fig. 83. 508. THEOREMA. *Areae parallelogrammorum* ABCD, abcd *ſimilium ſunt vt quadrata quorumuis laterum homologorum, ſeu ſimiliter poſitorum.*

DEMONSTR. Demiſſis enim ex aequalibus angulis A et *a* perpendiculis AE, *ae*, ſimilia erunt triangula ABE, *abe* ob angulos ad E et *e* rectos, et ob B $=$ *b* propter figurarum ſimilitudinem: ergo AE*: ae* $=$ AB*: ab* (408); atqui ob figurarum ſimilitudinem AB*: ab* $=$ BC*: bc*; quare AE: *ae* $=$ BC*: bc*; ſunt autem parallelogramma in ratione compoſita ex AE*: ae*, et BC*: bc* (504), ſeu ex BC*: bc*, et BC*: bc*; ergo ſunt vt $BC^2 : bc^2$ (192); vel cum ſit BC*: bc* $=$ AB*: ab* $=$ AD*: ad* $=$ DC*: dc*, ſunt vt $AB^2 : ab^2$, vel vt $AD^2 : ad^2$, vel vt $DC^2 : dc^2$ (212).

509. COROLL. Cum ſimilia triangula ſpectari poſſint tanquam ſimilium parallelogrammorum dimidia (386), etiam triangulorum ſimilium areae ſunt vt quadrata quorumuis laterum homologorum.

Fig. 55. 510. THEOREMA. *Areae quorumuis polygonorum ſimilium* ABCDE, abcde *ſunt vt quadrata quorumuis laterum homologorum.*

DEMONSTR. Ductis enim per aequales angulos A et *a* diagonalibus, ſimilia erunt triangula ABC et *abc*, ACD et *acd*, ADE et *ade* (438): eſt autem triangulum ABC*: abc* $= AB^2 : ab^2$; ACD*: acd* $= CD^2 : cd^2 = AB^2 : ab^2$; ADE*: ade* $= AE^2 : ae^2 = AB^2 : ab^2$ (509); ergo omnia triangula ſunt in eadem ratione $AB^2 : ab^2$: quare etiam ſummae omnium triangulorum, ſeu areae polygonorum ſunt vt $AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$ etc. (214).

511. Coroll. 1. Cum latera polygonorum regularium ſimilium homologa ſint vt radii circulorum circumſcriptorum (441), erunt quadrata laterum homologorum vt quadrata radiorum (212): cum ergo eorum areae ſint vt quadrata laterum homologorum (510), erunt etiam vt quadrata radiorum circulorum iisdem circumſcriptorum.

512. Coroll. 2. Atqui circuli ſunt polygona regularia infinitorum laterum (442), et quidem ſimilia (439); ergo eorundem areae ſunt vt quadrata radiorum; vel cum radii ſint vt diametri (210), vt quadrata diametrorum (212).

513. Coroll. 3. Si ſupra ſingula trianguli rectanguli ABC latera deſcribantur figurae ſimiles, ea, quae conſtruetur ſupra hypotenuſam BC, exaequabit reliquas duas ſimul ſumtas. Erit enim figura BC ad figuras AB + AC, vt $BC^2 : AB^2 + AC^2$ (510); ſed $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (433): ergo etiam figura BC = fig. AB + AC. Fig. 84.

514. Coroll. 4. Si ſupra eiusdem trianguli rectanguli latera deſcribantur ſemicirculi, lunulae M + N aequabuntur triangulo ABC. Nam ſemicirculus BAC aequabitur ſemicirculis BDA, AEC ſimul ſumtis (513): ergo vtrinque ab aequalibus tollendo ſegmenta O + P, reſtabit triangulum ABC = M + N. Fig. 85.

515. Problema. *Datis quotcunque figuris ſimilibus vnam aequalem, ac ſimilem conſtruere.*

Resolut. Iungatur ad angulum rectum duarum latera homologa AB et BC, vel diametri, ſi figurae datae fuerint circuli; ducta hypotenuſa AC erit latus homologum figurae, quae ſola aequa- Fig. 54.

bit duas illas, quarum latera ſunt AB et BC; aut ſi figurae circuli fuerint, erit AC diameter circuli aequantis ambos ſimul circulos, quorum diametri ſunt AB et BC (513). Rurſus huic hypotenuſae iungatur ad angulum rectum latus homologum tertiae figurae, aut diameter tertii circuli, et ſic porro, quemadmodum alibi de quadratis diximus (435). Latere inuento conſtruatur figura vni datarum ſimilis (443).

516. PROBLEMA. *Datis duabus figuris ſimilibus conſtruere tertiam ſimilem, quae ſit aequalis earundem differentiae.*

Fig. 53. RESOLUT. Super latere figurae, vel diametro circuli maioris AC deſcribatur ſemicirculus, et in eo pro chorda adplicetur latus homologum figurae, aut diameter circuli minoris AB; erit altera chorda BC latus homologum figurae, aut diameter circuli petiti. Nam figura lateris, vel diametri AC aequalis eſt figuris laterum, vel diametrorum AB et BC ſimul ſumtis (513): ergo figura lateris, vel diametri BC aequatur differentiae datarum figurarum: inuento igitur latere BC conſtruatur figura vni datarum ſimilis (443).

## CAPVT III.

### *De vario ſitu, et concurſibus Planorum.*

Fig. 86. 517. Si recta AB, cui altera CN perpendiculariter inſiſtat, manente eodem ſitu, circa ſemetipſam conuerti concipiatur, recta CN

motu ſuo deſcribet *planam* quamdam ſuperficiem, quae nuſpiam eminebit, aut dehiſcet, et quam impoſita linea recta omnibus ſuis punctis continget. Porro recta AC, quae omnibus rectis in eodem plano per punctum C ductis perpendicularis eſt, dicitur plano ipſi perpendicularis, quia hoc ipſo in nullam plani partem magis inclinatur.

518. COROLL. 1. Linea ergo recta per vnum plani punctum ducta, vel congruit tota cum plano, vel tota recedit ab eodem, nec poſſunt duo eius puncta in plano eſſe, quin omnia in eodem ſint; ſecus linea curuaretur vbi planum deſereret, et hinc contra hypotheſim non eſſet recta. Quare nequit pars rectae eſſe in plano, pars ſupra illud eminere, aut infra illud dehiſcere.

519. COROLL. 2. Duae rectae nonniſi in vnico puncto ſe interſecant. Si enim ſe in binis punctis ſecarent, ſegmentum inter duo illa puncta comprehenſum eſſet vtrique commune, poſſetque per illud duci planum, in quo ſit pars rectae, pars extra ipſum. Conf. n. 276.

520. COROLL. 3. Communis duorum planorum interſectio eſt linea recta. Cum enim ſingula interſectionis puncta debeant vtrique plano eſſe communia, tota linea interſectionis debet eſſe in vtroque plano; ſed niſi recta ſit, non erit in vtroque: nam vbi curuaretur, euidenter alterutrum planum deſereret.

521. COROLL. 4. Nequit pars vna plani congruere cum altero plano, pars ab eodem diuergere; ſecus pars rectae in vno plano ductae eſſet in altero plano, pars non eſſet; quod repugnat (518).

522. Coroll. 5. Nequit pars vna trianguli eſſe in plano, pars altera ſupra illud eminere, vel infra dehiſcere; ſecus pars duorum laterum eſſet in eodem illo plano, pars extra illud, quod abſurdum eſt (cit.). Hinc tria puncta non in directum ſita, per quae ſemper duci poteſt triangulum, determinant plani, in quo ſunt, poſitionem.

Fig. 31. 523. Coroll. 6. Duae rectae ſeſe interſecantes ſunt in eodem plano. Si enim in vtraque recta $Ab$ et $Ba$ praeter punctum commune interſectionis C aſſumantur ſingula puncta $\alpha$ et $\beta$, triangulum $C\alpha\beta$ erit totum in eodem plano (522); ergo et ſegmenta $C\alpha$ et $C\beta$ rectarum $Ab$ et $Ba$, et hinc ipſae rectae totae (518).

Fig. 26. 524. Theorema. *Si recta* AC *perpendicularis ſit duabus rectis* DH *et* GF *in eodem plano per eius extremum* C *ductis, hoc ipſo perpendicularis erit cuiuis alteri* MN *per idem punctum* C *in eodem plano ductae.*

Demonstr. Fiant enim CG = CH = CF = CD, et concipiantur duci rectae AH, AF, AD, AG, punctum A aequaliter diſtabit a punctis G, H, F, D (297): ergo, ſi triangulum ACH circa latus immotum AC conuerti concipiatur, deſcribet punctum H peripheriam circuli per puncta F, D, et G tranſeuntis, item per duo puncta rectae MN, e. g. per M et N: et hinc AH congruet cum AN et AM, ac CH cum CN et CM: puncta ergo A et C aequaliter diſtabunt a punctis M et N, ac proinde recta AC eſt perpendicularis ad MN (294).

525. COROLL. 1. Quare ſi recta quaepiam perpendicularis ſit ad duas rectas in plano quopiam per eius extremum ductas, erit hoc ipſo perpendicularis etiam ad planum ipſum (517).

526. COROLL. 2. E puncto extra planum poſito nonniſi vnica perpendicularis poteſt ad planum demitti: ſi enim duae poſſent demitti, ambae deberent eſſe perpendiculares ad eandem rectam earum extrema coniungentem (517), quod repugnat (299). Hinc puncti a plano diſtantiam metitur perpendicularis ex eodem ad planum demiſſa. Conf. n. 301.

527. COROLL. 3. Similiter ex eodem plani puncto nequit erigi, niſi vnica perpendicularis; ſecus ex eodem rectae per id punctum tranſeuntis puncto poſſent erigi plures perpendiculares, quod abſurdum eſt; quaeuis enim cum ea recta faceret angulum rectum, adeoque pars foret aequalis toti. Conf. n. 285.

528. THEOREMA. *Si ex eodem puncto* A *rectae* AF *erigantur tres perpendiculares* AB, AC, AD, *quarum nonniſi vnica poteſt eſſe in eodem plano cum recta* AF (285), *erunt omnes illae in vno plano.* Fig. 87.

DEMONSTR. Ducto enim per rectas AC et AB plano BN, et per rectas FA et AD plano MA, ſi tertia perpendicularis AD non foret in eodem plano BN, planum MA occurreret plano BN in aliqua recta AO infra, vel ſupra AD iacente, eſſetque recta AF etiam rectae AO perpendicularis (524), et hinc aequarentur anguli recti FAO, FAD, hoc eſt, pars et totum, quod abſurdum eſt.

529. THEOREMA. *Angulum planum, ſeu mutuam duorum planorum inclinationem metitur arcus inter plana interceptus, cuius centrum eſt in ipſa planorum interſectione communi, et cuius planum eſt eidem interſectioni perpendiculare.*

Fig. 88. DEMONSTR. Cogitetur enim planum quoddam AB alteri immobili BC impoſitum circa latus BD in plano immobili haerens conuerti, perſpicuum eſt diuerſas horum planorum inclinationes metiendas eſſe per numerum progreſſuum momentaneorum cuiusuis puncti e. g. E a puncto alterius plani correſpondente F: quare menſura inclinationum eſt arcus a puncto E decurſus, cuius centrum O eſt in communi interſectione BD. Quia vero idem centrum debet eſſe in plano ipſius arcus, neceſſe eſt, vt ſit in recta EO id planum generante; atqui ea recta generans eſt rectae BD, ſeu communi interſectioni perpendicularis (517), alias planum non generaret: igitur centrum eſt in communi interſectione rectae perpendicularis EO, et communis interſectionis BD, ſeu in illo rectae BD puncto, in quod incidunt quaelibet perpendiculares EO, e quouis arcus puncto ad BD demiſſae: quare planum arcus inclinationem metientis eſt perpendiculare communi planorum interſectioni BD.

530. COROLL. 1. Si ergo in duobus planis ad ſe inclinatis AB et BC e quouis mutuae interſectionis puncto O erigantur duae perpendiculares OE, et OF, angulus rectilineus EOF, erit menſura inclinationis planorum.

531. COROLL. 2. Si planum plano inſiſtat, efficit angulos contiguos duobus rectis aequales; nam arcus eosdem metientes complent ſemicirculi peripheriam.

532. COROLL. 3. Hinc ſi duo plana ſe interſecent, angulos ad verticem aequales comprehendent, qui omnes ſimul continebunt 360°; claudi enim poterunt circuli peripheria.

533. THEOREMA. *Si plana parallela* A, B, C *ſecentur plano quopiam* DELI, *lineae interſectionum* DE, FH, IL *erunt inter ſe parallelae.* Fig. 89.

DEMONSTR. Cum enim plana parallela vtcunque producta ſemper a ſe aequaliter diſtent, etiam lineae illae interſectionum in iisdem ſitae ſemper a ſe aequaliter diſtabunt: ergo parallelae ſunt.

534. THEOREMA. *Si duo plana* B *et* C *eidem rectae* FI *perpendicularia fuerint, erunt ea inter ſe parallela.*

DEMONSTR. Nam ducta recta IL, ac per eam plano ILHF, anguli ad I et F recti erunt, et hinc rectae IL et FH parallelae (313). Eadem eſt demonſtratio de quibusuis rectis per puncta I et F ductis: ergo nulla recta in vno plano ducta per punctum I concurret cum recta ducta in altero per punctum F; igitur plana ipſa producta nunquam concurrent: atque adeo parallela ſunt.

535. THEOREMA. *Recta* FI *vni planorum parallelorum* B *perpendicularis, eſt alteri quoque plano* C *perpendicularis.*

DEMONSTR. Ducto enim plano FHLI, erunt FH et IL parallelae (533); vnde angu-

lus F $=$ I (309): cum ergo F rectus ponatur, erit etiam I rectus, idque valet de omnibus rectis per puncta F et I in plano B et C ductis; ergo recta FI plano C perpendicularis eſt (517).

536. Theorema. *Si duas rectas* DI *et* EL *ſecent quotcunque plana parallela* A, B, C, *earum ſegmenta ſunt proportionalia, nimirum* EH : HL $=$ DF : FI.

Demonstr. Ducta enim EK rectae DI parallela, erit ob FH et IL parallelas (533) EH : HL $=$ FG : GK (405); ſed EG $=$ DF, et GK $=$ FI (383): ergo EH : HL $=$ DF : FI.

Scholion. Quae in ſuperioribus dicta ſunt de angulis, quos efficit recta lineas parallelas ſecans, etiam ad plana parallela plano quopiam ſecta transferri poſſe facile quisque intelligit.

# SECTIO III.

## DE SOLIDIS.

## CAPVT I.

### *De Solidorum geneſi, ſuperficie, et ſoliditate.*

537. *Angulus ſolidus* facile concipitur, ſi e ſingulis polygoni cuiuſpiam, aut trianguli BCD angulis ducantur rectae ad quoduis punctum A extra trianguli planum poſitum: naſcetur enim in A angulus ſolidus, tot conſtans angulis planis BAC, BAD, DAC, quot ſunt polygoni, aut trianguli latera. Fig. 90.

538. COROLL. 1. Tres minimum requiruntur anguli plani ad vnum ſolidum generandum. Nam omne polygonum, cui tanquam baſi inſiſtit angulus ſolidus, minimum trium eſſe debet laterum, cuiuis autem lateri vnus angulus planus inſiſtit.

Fig. 91. 539. COROLL. 2. Summa angulorum planorum vnum ſolidum conſtituentium minor eſſe debet quatuor rectis. Si enim angulus ſolidus A verſus baſim complanari debeat, neceſſe eſt aperiri latus aliquod e. g. AD, vt nempe figura anguli ſolidi abeat in planam, in qua omnes anguli plani ſolidum conſtituentes vna cum apertura noua DAD faciunt quatuor rectos (291): quare ſine illa apertura, ſeu nouo angulo accedente quatuor rectis minus continere debent, id quod ope anguli ſolidi e charta efformati facilius intelligitur.

540. Solida ſuperficiebus planis terminata generatim *polyedra* dicuntur; ſpeciatim vero *tetraedra*, *pentaedra*, *hexaedra* etc. a numero planorum, quibus terminantur. Porro ſolidorum *volumen* aut *ſoliditas* eſt ipſum illud ſpatium, quod implent, atque ſuperficie ſua concludunt. Quodſi ſolidorum anguli e totidem aequalibus planis angulis generentur, et plana terminantia ſint polygona regularia, et aequalia eiusdem ſpeciei, erunt polyedra ipſa *regularia*.

541. THEOREMA. *Quinque tantum poſſunt haberi polyedra regularia: tria nimirum terminata triangulis aequilateris, vnum quadratis, vnum pentagonis.*

DEMONSTR. 1) Cum quiuis trianguli aequilateri angulus contineat 60° (370), tres ſimul continent 180°, quatuor 240°, quinque 300°: ex his ergo generari poteſt angulus ſolidus, non item e pluribus, qui iam ad 360°, et vltra aſſurgunt (539): quare tria tantum polyedra poſſunt terminari triangulis aequilateris, ni-

mirum tetraedrum, octaedrum, et icoſaedrum, ſeu viginti angulorum.

2) Angulus quadrati rectus eſt, ac proinde nonniſi tres id genus anguli poſſunt conflare vnum ſolidum (cit.): hinc vnicum polyedrum poteſt terminari quadratis nempe hexaedrum, ſeu cubus.

3) Quiuis pentagoni regularis angulus continet 108°: ergo tres tantum eiuſmodi anguli poſſunt conſtituere ſolidum (cit.): quare vnicum duntaxat polyedrum poteſt haberi pentagonis regularibus terminatum, ſcilicet dodecaedrum, ſeu 12 angulorum.

Reliquorum polygonorum regularium vel tres anguli (quot tamen requiruntur ad efformandum ſolidum) iam aſſurgunt ad 360°, vel vltra; quare ex iis nequit generari angulus ſolidus, adeoque nequit dari polyedrum aliis polygonis regularibus terminatum: ergo tantum quinque memorata poſſunt haberi.

542. Si polygonum quotcunque ABC concipiatur moueri motu continuo, et parallelo iuxta rectam quampiam A*a*, donec perueniat ad ſitum *abc*, generabitur ſolidum, quod *priſma* adpellatur. Recta M*m* baſium centra connectens *axis* priſmatis dicitur, eſtque aequalis, et parallela lateribus A*a*, B*b*, C*c* ex ipſa priſmatis geneſi. Recta quaeuis *c*C ex vna baſi ad alteram perpendicularis priſmatis *altitudo* eſt. Fig. 92.

543. COROLL. 1. Priſma ergo rectum eſt, ſi linea directrix A*a* ad polygonum generans perpendicularis fuerit; ſecus obliquum erit.

544. COROLL. 2. In motu polygoni generantis quoduis latus AB, AC, BC deſcribit parallelogrammum $Ab$, $Bc$, $Ac$ (492), ea vero parallelogramma ſimul conſtituunt priſmatis ſuperficiem demtis baſibus, eandemque habent altitudinem.

545. COROLL. 3. Singula plani generantis veſtigia, ſeu priſmatis elementa ſunt polygona ſimilia, et aequalia.

546. COROLL. 4. Altitudo priſmatis recti eſt ipſe axis. Altitudo porro generatim exprimit numerum elementorum parallelorum ſolidum conſtituentium; eſt enim altitudo diſtantia baſium oppoſitarum, inter quas vtique nequeunt plura comprehendi elementa, quam ſint puncta in recta diſtantiam earundem metiente.

547. COROLL. 5. Si in polygono generante numerus laterum infinite creſcat, ac magnitudo infinite decreſcat, polygonum abit in circulum, et priſma in *cylindrum*, qui proinde eſt priſma rotundum, ſeu infinitorum laterum infinite paruorum. Quae ergo hactenus de priſmate dicta ſunt, etiam in cylindrum valent.

548. COROLL. 6. Gignitur adeo cylinder motu parallelo circuli genitoris, cuius peripheria generat conuexam eiusdem ſuperficiem.

SCHOLION. Priſmatum diuerſa ſunt genera pro numero laterum polygoni generantis: alia nempe dicuntur *triangularia*, alia *quadrangularia*, alia *pentagona*, etc. Quodſi baſis ſit parallelogrammum, priſma nuncupatur *parallelepipedum*; ſin autem quadratum fuerit, et axis priſmatis

ſmatis recti eiuſdem quadrati lateri aequalis, *cubus* dicitur.

549. THEOREMA. *Superficies cuiuſuis priſmatis ſeclufis baſibus eſt factum ex perimetro baſeos, ſeu polygoni generantis in altitudinem.*

DEMONSTR. Priſmatis enim ſuperficies coaleſcit e tot aeque altis parallelogrammis, quot ſunt baſeos, ſeu polygoni generantis latera (544); ea vero parallelogramma ſunt facta ex baſibus, ſeu ex perimetro polygoni generantis in communem altitudinem (493).

550. COROLL. 1. Cum ergo cylinder ſit priſma infinitorum, ac infinite paruorum laterum (547), eius quoque ſuperficies eſt factum ex peripheria baſeos in altitudinem.

551. COROLL. 2 Patet adeo methodus dati priſmatis, vel cylindri ſuperficiem metiendi.

552. COROLL. 3. Quod ſi altitudo cylindri aequetur diametro baſeos, eius conuexa ſuperficies erit quadrupla baſeos. Si enim diameter baſeos ſit $= d$, peripheria $= p$, erit conuexa cylindri ſuperficies $= dp$ (550), et baſis $= \frac{1}{4} dp$ (497).

553. THEOREMA. *Soliditas cuiuſuis priſmatis aequatur facto ex baſi, ſeu polygono generante in altitudinem.*

DEMONSTR. Priſma enim coaleſcit e tot polygonis baſi aequalibus, quot ſunt puncta altitudinis (545, 546): vnde ſoliditas eius gignitur, dum baſis generans toties ponitur, quot habet altitudo puncta, ſeu quum baſis in altitudinem ducitur.

554. COROLL. 1. Cum cylinder ſit e genere priſmatum (547), etiam cylindri cuiusuis ſoliditas aequatur facto ex baſi genitrice in altitudinem.

555. COROLL. 2. Patet ergo modus priſmatis, aut cylindri ſoliditatem inueſtigandi.

556. COROLL. 3. Priſmata vel cylindri eandem baſim, et altitudinem habentia aequalia ſunt.

Fig. 93. 557. Si polygonum quodcunque ABC iuxta rectam quampiam AD motu continuo, et parallelo ferri concipiatur, ita vt poſt ſingulos progreſſus momentaneos quoduis eius latus decreſcat parte ſui infiniteſima, ac in apice D euadat infinite paruum, ſeu abeat in punctum, naſcetur ſolidum, quod adpellatur *pyramis*, cuius *baſis* eſt illud ipſum polygonum generans, *vertex* punctum ſupremum D, *altitudo* recta e vertice ad baſim perpendicularis, *axis*, recta DN centrum baſeos cum vertice coniungens. Quodſi motus polygoni ſiſti concipiatur, priusquam latera in punctum abeant, pyramis erit *truncata* baſibus ſupra, et infra parallelis.

558. COROLL. 1. Quando polygonum hunc in modum mouetur, ſingula eiuſdem latera AB, AC, BC generant totidem triangula ABD, ACD, BCD aeque alta, quae ſimul ſumta pyramidis ſuperficiem conſtituunt demta baſi.

559. COROLL. 2. Si aucto in infinitum numero, ac diminuta quantitate laterum, polygonum generans abeat in circulum, pyramis abibit in *conum*, qui proinde eſt pyramis rotunda, ſeu infinitorum laterum.

560. COROLL. 3. Pyramis, aut conus rectus vel obliquus eſt, prout linea directrix, iuxta quam baſis moueri concipitur, fuerit ad planum baſeos perpendicularis, vel obliqua.

561. COROLL. 4. Conus praeterea truncatus gignitur, ſi trapezium habens latera oppoſita inaequalia, et ad vnum latus perpendicularia circa illud latus conuerti concipiatur.

562. THEOREMA. *Superſicies pyramidis rectae demta baſi, aequatur facto ex ſemiperimetro baſeos in rectam e vertice ad quoduis baſeos latus perpendicularem.*

DEMONSTR. Conſtat enim ea ſuperficies totidem triangulis aeque altis, quot in baſi generante ſunt latera (558), haec autem omnia triangula aequantur facto ex ſemiperimetro baſeos pyramidis in communem eorundem altitudinem (494).

563. COROLL. 1. Quoniam conus eſt pyramis infinitorum laterum, in quo perpendiculum e vertice ad quoduis latus baſeos demiſſum eſt ipſum latus coni (559), ſuperficies coni recti demta baſi aequatur facto ex ſemiperipheria baſeos in latus coni.

564. COROLL. 2. Perſpicua ergo eſt ratio pyramidis, vel coni recti ſuperficiem metiendi.

SCHOLION. Si pyramis recta non fuerit, ſingula triangula ſuperficiem eius conſtituentia ſeorſim erunt metienda, et in vnam ſummam addenda. Coni obliqui ſuperficies ad calculum vocari hactenus non potuit.

565. THEOREMA. *Superficies coni recti eſt ad aream baſeos, vt latus coni ad radium baſeos.*

DEMONSTR. Sit enim latus coni $= l$, peripheria baſeos $= p$, radius $= r$, erit ſuperficies coni ad aream baſeos vt $\frac{1}{2}lp : \frac{1}{2}rp = \frac{1}{2}l : \frac{1}{2}r = l : r$ (563, 497).

566. THEOREMA. *Superficies coni recti aequatur circulo, cuius radius eſt medius proportionalis inter latus coni, et radium baſeos.*

DEMONSTR. Sit enim ſuperficies coni $= s$, area dicti circuli $= a$, radius eiuſdem $= m$, peripheria $= n$, latus coni $= l$, radius baſeos $= r$, peripheria $= p$, erit $s : a = \frac{1}{2}lp : \frac{1}{2}mn = lp : mn$: eſt vero ex hypotheſi $l : m = m : r = n : p$ (442): ergo $lp = mn$ (202), et hinc $s = a$.

567. THEOREMA. *Superficies pyramidis rectae truncatae baſes parallelas habentis ſecluſis baſibus aequatur facto ex ſemiſumma perimetrorum baſium in perpendiculum inter duo baſium latera oppoſita interceptum.*

DEMONSTR. Nam ea ſuperficies coaleſcit e tot trapeziis baſes parallelas, et eandem altitudinem habentibus, quot ſunt baſium pyramidis latera; atqui area omnium horum trapeziorum aequatur facto ex ſemiſumma laterum parallelorum, ſeu perimetrorum baſium in communem altitudinem, ſiue in perpendiculum inter duo quaeuis baſium latera interceptum (495).

568. COROLL. I. Cum ergo conus truncatus ad pyramidem truncatam referatur, coni truncati recti ſuperficies demtis baſibus aequatur ſemiſummae peripheriarum baſium ductae in latus coni eiuſdem.

569. COROLL. 2. Quoniam ſemiſumma perimetrorum baſium oppoſitarum aequatur perime-

tro, quae ſit media arithmetice proportionalis inter perimetros baſium (201), ſuperficies id genus pyramidis, vel coni aequatur facto e perpendiculo inter duo quaeuis baſium oppoſitarum latera intercepto, aut e latere coni truncati in perimetrum, quae ſit media arithmetice proportionalis inter perimetros baſium.

570. THEOREMA. *Soliditas cuiusuis pyramidis eſt tertia pars facti ex baſi in altitudinem.*

DEMONSTR. Quaeuis enim pyramis conſtat infinitis polygonis ſimilibus, quorum latera inchoando a vertice continenter vna parte infiniteſima creſcunt, ac proinde numerorum naturalium progreſſionem conſtituunt (557); ipſa autem illa polygona, cum ſint vt quadrata laterum homologorum (510), conſtituunt ſeriem quadratorum numerorum naturalium: hinc eorum ſumma, ſeu pyramidis ſoliditas rite exhibetur per ſummam ſeriei dictorum quadratorum; eſt vero ea ſumma aequalis tertiae parti facti ex quadrato vltimo in numerum terminorum (267): quare cum in ſerie hac polygonorum terminus vltimus ſit ipſa baſis, numerus polygonorum ipſa altitudo (546), ſoliditas pyramidis cuiusuis eſt tertia pars facti ex baſi in altitudinem.

571. COROLL. 1. Cum ergo conus ſit pyramis infinitorum laterum, eius quoque ſoliditas eſt tertia pars facti ex baſi in altitudinem.

572. COROLL. 2. Vnde pyramis eſt tertia pars priſmatis; conus cylindri eandem baſim, et altitudinem habentis (553, 554).

573. COROLL. 3. In promtu ergo eſt modus ſoliditatem datae pyramidis, vel coni inueniendi.

Quodſi pyramis, aut conus truncatus ſit, tollenda eſt ex integri ſoliditate partis reſectae ſoliditas et reſtabit ſoliditas trunci.

574. Coroll. 4. Pyramides, aut coni aequalem habentes baſim et altitudinem aequales ſunt.

Fig. 94. 575. Duplex poteſt eſſe globi geneſis. 1) Si ſemicirculus AbdG ſpectetur tanquam dimidium polygonum infinitorum laterum A*m*, *m b*, *b c* etc. ac e ſingulis angulis *m*, *b*, *c* etc. demittantur ad diametrum perpendiculares *m*A, *b*N, *c*N etc. area ſemicirculi abibit in infinita trapezia *mb*NA, *bc*NN etc. quae in ea reuolutione gignent totidem conos truncatos (561), quorum axes erunt portiones diametri AN, NN, NO etc. quique itidem tanquam totidem elementa generabunt ſolidum, quod *ſphaera*, ſeu *globus* nominatur, cuius *axis* eſt diameter AG.

2) Si intra genitorem ſemicirculum ABDG concipiantur tot duci ſemiperipheriae concentricae, quot ſunt puncta in radio AO, facta reuolutione hae ſemiperipheriae gignent totidem ſuperficies ſphaericas, ſeu cruſtas infinite tenues, e quibus tota ſphaerae ſoliditas coaleſcet, et quarum radii a centro inchoando erunt in progreſſione numerorum naturalium.

576. Theorema. *Si ſphaera plano quopiam vtcunque ſecetur, planum ſectionis ſemper erit circulus.*

Fig. 95. Demonstr. Si enim ſectio tranſeat per centrum C, patet rectas CA, CB, CD, CE fore radios ſphaerae, atque adeo inter ſe aequales: quare ſectio per puncta A, B, D, E tranſiens erit circulus. Si vero ſectio *a b d e* per centrum

non tranſeat, erigatur ad eius planum e centro ſphaerae perpendicularis $Cc$, occurrens eidem in $c$, et ducantur e centro C ad peripheriam ſectionis rectae quotcunque $Ca$, $Cb$, $Cd$, $Ce$ etc. ac ex puncto $c$ rectae $ca$, $cb$, $cd$, $ce$ etc. erit recta $Cc$ ad has poſtremas omnes perpendicularis (517). Iam in triangulis rectangulis $Cca$, $Ccb$, $Ccd$, $Cce$ eſt $aC^2 = ac^2 + cC^2$, $bC^2 = bc^2 + cC^2$, $dC^2 = dc^2 + cC^2$, $eC^2 = ec^2 + cC^2$ (433); atqui $aC = bC = dC = eC$, cum ſint radii eiusdem ſphaerae: ergo etiam $aC^2 = bC^2 = dC^2 = eC^2$, et hinc etiam $ac^2 + cC^2 = bc^2 + cC^2 = dc^2 + cC^2 = eC^2 + cC^2$, ſeu tollendo ab aequalibus idem $cC^2$, erit $ac^2 = bc^2 = dc^2 = ec^2$; et hinc $ac = bc := dc = ed$, ergo puncta $a$, $b$, $d$, $e$ aequaliter diſtant a puncto $c$, ac proinde planum ſectionis $abde$ eſt circulus.

577. COROLL. Facile adparet circulum ſphaerae maximum eſſe, cuius planum per centrum ſphaerae tranſit: ceteros eo minores, quo magis recedunt ab eodem; decreſcunt enim eorum diametri, quae ſunt chordae circuli maximi (320).

578. THEOREMA. *Superficies cuiusuis ſphaerae aequatur facto ex peripheria circuli maximi in diametrum.*

DEMONSTR. Sphaerae ſuperficies coaleſcit e ſuperficiebus infinitorum conorum truncatorum, quorum omnium axes ſimul aequales ſunt diametro ſphaerae (575). Sit ergo vnus eiusmodi conus $BDdb$ in Fig. 96, ſit MN radius ſectionis, cuius peripheria ſit media arithmetice proportionalis inter peripherias baſium coni; erit ſuperficies huius coni $=$ BD $\times$ periph. MN (569).

Ducta perpendiculari BG ſimilia erunt triangula BDG, MCN ob angulos ad G et N rectos, et ad C et D aequales; nam angulus BDG ſeu BMN habet pro ſua menſura arcum MA (340), quem etiam habet angulus C: ergo BG ſeu AE: BD = MN: MC = periph. MN: periph. MC (442); vnde AE × periph. MC = BD × periph. MN; id eſt, ſuperficies coni truncati BD$db$ aequatur peripheriae circuli maximi, cuius nempe radius eſt MC, ductae in eius axem AE: igitur ſuperficies omnium eiusmodi conorum, ſeu totius ſphaerae aequatur peripheriae circuli maximi ductae in omnium axem, ſiue in diametrum ſphaerae.

579. Coroll. 1. Eſt adeo ſphaerae ſuperficies quadrupla circuli eiusdem maximi. Nam ſi diameter ſphaerae dicatur $d$, peripheria circuli maximi $p$, erit ſuperficies ſphaerae = $pd$, area circuli maximi = $\frac{1}{4}pd$ (497). Cum ergo areae circulorum ſint vt quadrata radiorum, vel diametrorum (512), in eadem ratione ſunt etiam ſphaerarum ſuperficies.

580. Coroll. 2. Superficies ſphaerae aequatur conuexae ſuperficiei cylindri habentis pro axe diametrum ſphaerae, et pro baſi circulum eiusdem maximum. Nam poſita diametro ſphaerae = $d$, et peripheria circuli maximi = $p$, erit ſuperficies eiusmodi cylindri = $dp$ (550), et ſuperficies ſphaerae itidem = $dp$ (578). Si ergo ad eius cylindri conuexam ſuperficiem addantur baſes, tota cylindri ſuperficies continebit 6 circulos ſphaerae maximos, et ſphaerae ſuperficies continebit 4: erit ergo illa ad hanc vt 6: 4 = 3: 2.

581. COROLL. 3. Superficies conuexa trunci ſphaerici duobus planis parallelis comprehenſi MD*dm* aequatur facto ex eiusdem altitudine NE in peripheriam circuli maximi. Superficies item conuexa ſegmenti ſphaerici MA*m* aequatur facto ex eiusdem altitudine AN in peripheriam circuli maximi.

582. COROLL. 4. Sunt ergo ſegmentorum eiusdem ſphaerae ſuperficies vt eorundem altitudines (190). Quare dato ſphaerae radio, et ſegmenti altitudine inuenitur eiusdem ſuperficies inferendo: vt radius ad ſegmenti altitudinem, ita dimidia ſphaerae ſuperficies, ſeu duplum circuli maximi (579) ad ſegmenti ſuperficiem.

583. THEOREMA. *Soliditas cuiusuis ſphaerae aequatur tertiae parti facti e ſuperficie eiusdem in radium.*

DEMONSTR. Sphaerae enim ſoliditas coaleſcit ex innumeris ſuperficiebus ſphaericis concentricis, quarum radii a centro inchoando conſtituunt ſeriem numerorum naturalium (575); cum ergo eae ſuperficies ſint vt quadrata radiorum (579), erunt in ſerie quadratorum numerorum naturalium, ac proinde ſumma eorundem rite exhibetur per ſummam ſeriei quadratorum numerorum naturalium; eſt autem ea ſumma aequalis tertiae parti facti e quadrato vltimo in numerum terminorum (267): ergo cum in hac ſuperficierum concentricarum ſerie terminus vltimus ſit ipſa ſphaerae ſuperficies, et numerus terminorum ipſe radius, ſoliditas cuiusuis ſphaerae aequatur tertiae parti facti e ſuperficie eiusdem in radium.

584. Coroll. 1. Sphaera ergo aequatur cono, aut pyramidi, cuius altitudo ſit radius ſphaerae, baſis autem quadrupla circuli maximi, ſeu ſuperficies ſphaerae (570, 571).

585. Coroll. 2. Quoniam ſuperficies ſphaerae eſt quadrupla circuli maximi (579), ſi is circulus ponatur $= c$, diameter ſphaerae $= d$, erit ſphaerae ſoliditas $= \frac{1}{6} d \times 4c = \frac{1}{3} dc = \frac{2}{3} dc$.

586. Coroll. 3. Quare ſi cylindro, cuius axis, et diameter baſeos ſit aequalis diametro ſphaerae, cogitetur inſcripta ſphaera, et conus rectus, erunt horum trium corporum ſoliditates vt $\frac{3}{3} dc$, $\frac{2}{3} dc$, $\frac{1}{3} dc$, ſeu vt 3, 2, 1.

Fig. 95. 587. Coroll. 4. Ergo cylindri recti, et ſphaerae eidem inſcriptae tam ſuperficies, quam ſoliditates ſunt vt 3 : 2 (580).

588. Coroll. 5. Hemiſphaerium AFD duplum eſt coni AFD eandem baſim, et altitudinem habentis. Nam hemiſphaerium aequatur cono habenti pro baſi eiuſdem ſuperficiem, ſeu duplum circuli maximi, et pro altitudine radium (584); eſt autem is conus ad hunc, vt baſis ad baſim (571), ſeu vt duo circuli maximi ad vnum.

589. Problema. *Inuenire ſoliditatem ſectoris ſphaerici* Cafd.

Resolut. Inſtituatur haec proportio: vt ſe habet ſuperficies ſphaerae ad eiuſdem ſoliditatem, ita ſe habet ſuperficies ſectoris inuenienda per n. 581 ad eius ſoliditatem. Sphaera enim et ſector aequantur duobus conis eandem habentibus altitudinem (584): quare eorum ſoliditates ſunt vt

baſes (571*), ſeu vt ſphaerae et ſectoris ſuperficies.

590. Coroll. Si a ſectore tollatur conus *Cabde*, relinquitur ſoliditas ſegmenti ſphaerici *afd*. Huius autem coni altitudo habetur, ſi a radio ſphaerae *f*C dematur ſegmenti altitudo *fc*.

Scholion. Quemadmodum ſuperficies metimur ſuperficie quadam quadrata, ita ſoliditatem corporum menſuramus ſolido quodam cubico, totque perticarum, pedum, digitorum etc. cubicorum dicimus eſſe volumen corporis, quot eiuſmodi cubi intra eius ambitum poſſunt contineri. Porro in quouis ſolido ſecundum trinam dimenſionem poſſunt concipi id genus cubi: nempe ſecundum baſeos longitudinem tot poſſunt collocari in quauis ſerie e. g. pedes cubici, quot pedum eſt ea longitudo; ſecundum latitudinem autem baſeos, et ſecundum ſolidi altitudinem tot poſſunt eſſe eiuſmodi cuborum ſeries, quot ea latitudo, ac altitudo continet pedes. Nimirum ſi in aliquo priſmate quadrangulari longitudo baſis ſit 5 pedum, latitudo 4, altitudo 8, erunt in quauis ſerie ſecundum longitudinem baſeos 5 pedes cubici, ſeries autem in baſi ipſa 4, ſecundum altitudinem 8 numerabuntur: conſtabit ergo priſma vniuerſe pedibus cubicis $5 \times 4 \times 8 = 160$.

# CAPVT II.

## *De Solidorum comparatione.*

591. THEOREMA. *Soliditates priſmatum, et cylindrorum ſunt in ratione compoſita baſium, et altitudinum.*

DEMONSTR. Si enim altitudines dicantur A et *a*, baſes B et *b*, erunt eorum ſoliditates vt A ×B: *a*×*b* (553, 554), quae ratio eſt compoſita e rationibus A: *a*, B: *b*.

592. COROLL. 1. Cum ergo pyramis ſit tertia pars priſmatis, conus cylindri eandem baſim, et altitudinem habentis (572), etiam pyramidum et conorum ſoliditates ſunt in eadem ratione compoſita (210).

593. COROLL. 2. Si ergo altitudines aequantur, baſium, ſi baſes, altitudinum rationem habent.

594. COROLL. 3. Si altitudines fuerint baſibus reciproce proportionales, recenſita ſolida aequalia ſunt, et contra.

595. Solida *ſimilia* dicimus, quae angulos ſolidos correſpondentes aequales habent, et totidem planis ſibi mutuo ſimilibus terminantur.

596. COROLL. 1. Ergo in ſolidis ſimilibus quaeuis homologa planorum correſpondentium latera proportionalia ſunt, cum ſint latera homologa figurarum ſimilium.

597. COROLL. 2. Duo quaeuis plana correſpondentia corporum ſimilium ſunt vt quadrata ſuorum (510), adeoque quorumuis aliorum late

rum homologorum (596). Hinc etiam ſummae omnium planorum, id eſt, ſuperficies corporum ſimilium planis rectilineis terminatorum ſunt vt quadrata quorumuis laterum homologorum (214).

598. THEOREMA. *Priſmatum ſimilium* AB *et* ab *altitudines* AF *et* af *ſunt vt duo quaeuis latera homologa baſium.* Fig. 97.

DEMONSTR. Si enim ſuper eorundem baſes BED, *bed* concipiantur exſtructa eſſe duo alia priſmata recta ſimilia BC et *bc*, quae eaſdem habeant cum prioribus altitudines, erit CD : *cd* = ED : *ed* (596); ſed CD = AF, et *cd* = *af* ex hypotheſi : ergo AF : *af* = ED : *ed* = BE : *be* = BD : *bd*.

599. COROLL. 1. Eadem plane ratione oſtenditur, idem theorema obtinere etiam in pyramidibus ſimilibus.

600. COROLL. 2. Cumque baſes ſint figurae ſimiles (595), erunt earum perimetri vt duo quaeuis latera homologa (440), ac proinde vt priſmatum, vel pyramidum altitudines.

601. COROLL. 3. Quare cum cylindri ſimiles ſint priſmata ſimilia, et coni ſimiles ſint pyramides ſimiles infinitorum laterum, horum etiam altitudines ſunt vt peripheriae, ac proinde vt radii baſium (442).

602. COROLL. 4. Superficies priſmatum, aut pyramidum ſimilium ſunt vt quadrata quorumuis laterum homologorum (597): ergo etiam vt quadrata altitudinum (598).

603. COROLL. 5. Quia ergo cylindri ſimiles ad priſmata ſimilia, coni ſimiles ad pyramides ſimiles referuntur, horum etiam ſuperficies ſunt

vt quadrata altitudinum, adeoque etiam vt quadrata radiorum baſium (601), vel vt baſes ipſae (512).

604. Theorema. *Soliditates priſmatum ſimilium* AB *et* a b *ſunt vt cubi quorumlibet laterum homologorum.*

Demonstr. Sunt enim hae ſoliditates in ratione compoſita baſium, et altitudinum (591), et baſes vt ſunt $ED^2$: $ed^2$ (510) $= AF^2$: $af^2$ (598): ergo ſoliditates ſunt vt $ED^2 \times AF$: $ed^2 \times af$, ſeu vt $ED^3$: $ed^3 = AF^3$: $af^3$.

605. Coroll. 1. Eadem plane eſt demonſtratio pro pyramidibus ſimilibus.

606. Coroll. 2. Cum ergo cylindri priſmatis ſimilibus, coni pyramidibus accenſeantur, etiam horum ſoliditates ſunt vt cubi altitudinum, ac proinde vt cubi radiorum baſium (601).

607. Theorema. *Soliditates ſphaerarum ſunt vt cubi radiorum, vel diametrorum.*

Demonstr. Sint enim duarum ſphaerarum diametri D et $d$, circuli earundem maximi C et $c$; erunt ſoliditates vt $\frac{2}{3}$DC: $\frac{2}{3}$ $dc$ (585) $=$ DC: $dc$; atqui C: $c = D^2$: $d^2$ (512); ergo ſoliditates ſunt vt $D \times D^2$: $d \times d^2 = D^3$: $d^3$.

*Finis Elementorum Geometriae.*

# ELEMENTA
## SECTIONVM
# CONICARVM
### EXTRA CONVM SPECTATARVM.

## CAPVT I.

### *De ſectionibus Conicis ad axes relatis.*

608.

Si e ſingulis curuae cuiuſdam punctis M, $m$ ducantur perpendiculares MD, $md$ ad rectam quampiam AB poſitione datam, item aliae rectae MF, $m$F ad punctum aliquod F extra rectam AB ſitum, fueritque conſtanter $FM : MD = Fm : md$, eiuſmodi curua *ſectio conica* adpellatur. Speciatim vero Fig. 91.

ſectio conica vocatur *parabola*, ſi fuerit FM $=$ MD; *ellipſis* ſi FM $<$ MD; *hyperbola* ſi FM $>$ MD. Recta AB dicitur *directrix*, punctum F *focus*, ratio FM : MD *ratio determinans*, quia nempe haec determinat ſpeciem ſectionis conicae.

609. Coroll. 1. Quoniam ergo rectae FM et MD vel aequales inter ſe ſunt, vel illa hac minor, vel maior eſt, ſectio omnis conica vel parabola, vel ellipſis, vel hyperbola eſt.

610. Coroll. 2. Quodſi e punctis M et $m$ rectae MH et $mh$ ad directricem AB obliquae ducantur ſub aequalibus angulis H et $h$, ſitque FM: MH $=$ F$m$ : $mh$, curua erit hoc ipſo ſectio conica: nam demiſſis perpendiculis MD et $md$ ob ſimilia triangula MHD, $mhd$ erit MH : $mh$ $=$ MD: $md$: ergo etiam erit FM : MD $=$ F$m$ : $md$.

Fig. 100. 611. Coroll. 3. Si directrix AB infinite remota concipiatur, ita vt ME ſit $= \infty$, erit ME $=$ $m$E (259), et hinc FM $=$ F$m$: ergo ſectio conica abibit in circulum, et focus F in eiuſdem centrum.

Scholion. Curuae hae idcirco vocantur ſectiones conicae, quia e cono vtcunque non per verticem ſecto naſcuntur. Speciatim autem parabola nomen accepit ab ea aequalitate, quam inter ſe habent rectae FM et MD: ellipſis ab eo defectu, quo FM deficit ab MD: hyperbola ab eo exceſſu, quo FM ſuperat rectam MD; quanquam vocabulorum horum origo pluribus ex capitibus repeti poteſt, quemadmodum in ſequentibus adnotabimus.

612. Pro-

612. Problema. *Datis foco, directricis poſitione, et ſpecie curuae ſectionem conicam deſcribere.*

Resolut. Per datum focum F ducatur recta H*h* directrici AB perpendicularis, circa quam vtrinque fiant anguli *g*E*h*, *h*E*i* aequales, ac vel ambo ſemirecti, ſi parabola deſcribenda ſit; vel ſemirecto minores, ſi ellipſis; vel maiores, ſi hyperbola. Deinde per focum F ducatur recta T*t* faciens cum H*h* angulum *h*F*t* ſemirectum, cui ſi aequalis fuerit internus *h*E*i*, rectae T*t*, I*i* erunt parallelae, vt in Fig. 99. Si minor, concurrent inferne in *l*, vt in Fig. 100. Si maior, concurrent ſuperne in *l*, vt in Fig. 101. Per punctum L ducatur recta LN, ac per punctum *l* recta *ln* directrici AB parallela: erunt puncta M et *m* vertices ſectionis conicae. Quodſi per quaeuis alia puncta rectae *ei* plures id genus parallelae ducantur e. g. *u*V, OQ etc. cum in triangulis FVE, F*u*E anguli ad F ſint recti, et ad E ex conſtr. aequales, aequalia erunt ipſa triangula (377), et hinc FV = F*u*: eadem de cauſſa LM = MN, *lm* = *mn*, OR = RQ. Denique centro F apertura RQ vel RO reſecentur in recta OQ puncta P et *p*, idemque fiat in quamplurimis parallelis; erit curua per haec puncta ducta ſectio conica petita.

Demonstr. Cum enim ex conſtr. angulus *h*F*t* ac proinde etiam eius verticalis LFM ſemirectus ſit, erit etiam FLM ſemirectus (362), hinc FM = LM = MN (369). Eſt vero in triangulis ſimilibus EMN, ERQ, MN : RQ = EM : ER, ergo pro MN ponendo FM, et pro ER

rectam PD (308), ſimulque alternando erit FM: EM = RQ ſeu ex conſtr. FP: PD: quare curua erit ſectio conica (608). Iam ſi angulus *hEi* ſemirectus ſit, erit etiam MNE ſemirectus, et hinc MN ſeu FM = ME, adeoque ſectio erit parabola (cit.). Si angulus *hEi* minor ſit ſemirecto, erit alter MNE maior ſemirecto (362), et hinc MN ſeu FM < ME (368), vnde ſectio ellipſis erit; ſin autem is angulus ſit maior ſemirecto, erit MNE ſemirecto minor, adeoque MN ſeu FM > ME: ergo ſectio hyperbola erit (608).

613. Coroll. 1. Quam diu fuerit RQ > FR, tamdiu centro F interuallo RQ ſemper inuenientur hinc et inde duo puncta P et *p*; at vbi RQ euaſerit = FR, vnicum punctum *m*, vt in Fig. 100, et 101, vbi fuerit RQ < FR, nullum omnino punctum inuenietur.

614. Coroll. 2. Eſt vero FR ſemper = RS ob angulos RFS, FSR ſemirectos, adeoque inter ſe aequales. Recta porro RS vel erit minor, quam recta RQ, vt in Fig. 100 inter puncta L et *l*; in Fig. 99, et 101 a puncto L verſus *t* vbique: vel cum ea congruet, vt in puncto L et *l*: vel euadet maior, vt vltra L et citra *l* in Fig. 100.

615. Coroll. 3. Ellipſis tota iacet citra directricem AB in Fig. 100. Quamdiu enim parallela OQ ducitur intra puncta L et *l*, ſemper RQ vel RO eſt > RS, ſeu FR, adeoque centro F interuallo RQ vel RO ſemper inueniuntur hinc et inde duo puncta P, *p*: at in punctis L et *l*, RQ ſit = RS = FR, adeoque vnicum

tantum ellipſeos punctum M vel $m$ determinatur: denique extra puncta L et $l$ RQ vel RO ſit $<$ RS ſeu FR, ac proinde nullum ellipſeos punctum pertingit vltra M (613); ſed neque pertingit vllum citra $m$; hinc ellipſis in eo puncto in ſeipſam redit.

616. Coroll. 4. Parabola vnicum habet ramum citra directricem infinite extenſum. Cum enim in ea recta I$t$ et T$r$ parallelae ſint (612) in Fig. 99, punctum $l$ infinite recedit, adeoque tota linea indefinita L$t$ iacet intra angulum $g$E$i$, et tota LT extra eundem, ac etiam extra eius verticalem GEI, ergo per totum interuallum L$t$ eſt RQ $>$ RS; et per totum interuallum LT eſt RQ $<$ RS; quare nullum parabolae punctum ſurſum vltra L, deorſum vero ſine fine poſſunt inueniri (613).

617. Coroll. 5. Hyperbola in Fig. 101 duos habet ramos, alterum citra, alterum vltra directricem AB infinite excurrentes. Nam in ea tota recta L$t$ iacet intra angulum $g$E$i$, adeoque ſemper RQ $>$ RS. Punctum vero $l$ cadit vltra directricem, et tota recta $l$T iacet intra angulum verticalem GEI, adeoque rurſus per totum ſpatium $l$T eſt RQ $>$ RS: hinc tam intra ſpatium L$t$, quam intra $l$T innumera inueniri poſſunt hyperbolae puncta (613). At per totum ſpatium L$l$ eſt RQ $<$ RS; ergo intra rectas LN et $ln$ nulla poſſunt hyperbolae puncta cadere (cit.).

618 Recta M$m$ inter vertices curuae intercepta *axis maior*, aut *transuerſus* dicitur; chorda $u$V per focum tranſiens, ac directrici AB parallela *parameter* axis maioris; punctum axis me-

dium C *centrum*; ſumma perpendicularium $Cx$ et CX, quarum quaeuis ſit media proportionalis inter binas foci F a verticibus M et $m$ diſtantias, *axis minor*, ſeu coniugatus; rectae $Pp$ axi vtrilibet perpendiculares, et vtrinque in curuae perimetro terminatae *ordinatae*; ſegmenta axis inter ordinatas et vertices, aut inter ordiuatas et centrum intercepta *abſciſſae* adpellantur. In ſequentibus, niſi expreſſe moneamus, abſciſſas a verticibus computabimus, quales in Fig. 100 ſunt MR et $m$R.

619. Coroll. 1. Si ergo axis maior ponatur $= 2a$, minor $= 2b$, diſtantia foci a vertice propiore $= c$, erunt in ellipſi diſtantiae foci F a verticibus $FM = c$, $Fm = 2a - c$; in hyperbola $FM = c$, $Fm = 2a + c$, hinc $b^2 = 2ac \mp c^2$; et $c^2 = \pm 2ac \mp b^2$, ſignis ſuperioribus in ellipſi, inferioribus in hyperbola ſeruientibus, id quod deinceps etiam in ſequentibus obſeruandum eſt.

620. Coroll. 2. Axis parabolae infinitus eſt (616). In eadem parameter axis $uV$ eſt quadrupla diſtantiae foci a vertice. Nam in triangulo FEV ob angulos ad E et V ſemirectos $FV = EF = 2FM$; vnde $uV = 4FM$.

621. Coroll. 3. In quauis ſectione conica axis transuerſus bifariam ſecat ſuas ordinatas, ipſamque curuae aream. Eſſet enim ordinata $Pp$ chorda circuli centro F radio FP deſcripti (612); ergo a perpendiculari FR bifariam ſecatur (322). Hinc area curuae vtrinque totidem aequalibus ſemiordinatis ſterni poteſt, ac proinde vtrinque aequalis eſt.

622. Coroll. 4. Quadratum ſemiaxis minoris aequatur differentiae quadratorum ſemiaxis maioris, et diſtantiae foci a centro. Eſt enim $CX^2 = FM \times Fm$ (618), et ob rectam $Mm$ in C bifariam, in F non bifariam ſectam erit in ellipſi in Fig. 100 $CM^2 = CF^2 + FM \times Fm$ (426), et hinc $FM \times Fm = CX^2 = CM^2 - CF^2$. In hyperbola in Fig. 101 ob rectam $Mm$ in C bifariam ſectam, eique adiectam FM erit $CF^2 = CM^2 + FM \times Fm$ (cit.), et hinc $FM \times Fm = CX^2 = CF^2 - CM^2$.

623. Coroll. 5. Eſt ergo $CF^2 = CM^2 \mp CX^2$, ſeu quadratum diſtantiae foci a centro aequatur ſummae quadratorum ſemiaxium in hyperbola, differentiae eorundem in ellipſi.

624. Theorema. *In parabola quadratum ſemiordinatae aequatur facto ex parametro in abſciſſam.* Fig. 99.

Demonstr. Cum enim recta OQ bifariam ſecta ſit in puncto R (612), et non bifariam in puncto S, erit $RS^2 + OS \times SQ = RQ^2$ (426), ſed $SQ = LN$ (383), $RQ = FP$ (612), et $RQ^2 = FP^2 = FR^2 + RP^2$ (433), quare his ſubſtitutis erit $RS^2 + OS \times LN = FR^2 + RP^2$: ergo vtrinque tollendo $RS^2$ et $FR^2$ aequalia (614) erit $OS \times LN = RP^2$. Ducatur iam recta LZ perpendicularis ad OQ, erit ob angulos $OLZ = gEh$ ſemirectos etiam LOZ ſemirectus (612), hinc $OZ = LZ$; eadem de cauſſa $LZ = ZS$; quare $OS = 2LZ = 2MR$, et $OS \times LN = 2MR \times LN = MR \times 2LN$: quare $RP^2 = MR \times 2LN$, ſeu cum ſit $LN = FV$ (384), $RP^2 = MR \times uV$.

625. Coroll. 1. Ergo MR: RP $=$ RP: $u$V (204), hoc eſt, parameter eſt tertia proportionalis ad abſciſſam, et ſemiordinatam quamcunque.

626. Coroll. 2. Si vna ſemioidinata ſit $= u$, eius abſciſſa $= t$, altera ſemiordinata $= y$, eius abſciſſa $= x$, parameter $= p$, erit $u^2 = pt$, $y^2 = px$; ergo $u^2 : y^2 = pt : px = t : x$ (210); hoc eſt, quadrata ſemiordinatarum ſunt vt abſciſſae correſpondentes.

627. Theorema. *In ellipſi, et hyperbola quadratum ſemiordinatae axis maioris eſt ad factum abſciſſarum correſpondentium, vt quadratum ſemiaxis minoris ad quadratum ſemiaxis maioris.*

Fig. 100. 101. Demonstr. Ducta enim vt ante recta LZ, erit ob triangula OLS, $nLl$ ſimilia.

$$OS : nl = LS : Ll.$$

Eſt autem $ml = Fm$ ob angulos ad F et $l$ ſemirectos, adeoque $nl = 2Fm$, quo ſubſtituto erit

$$OS : 2Fm = LS : Ll.$$

Porro ob ſimilia triangula L$z$S, LZ$l$ habetur

$$LS : Ll = Lz : LZ = MR : Mm.$$

ergo conferendo duas poſtremas proportiones erit

$$1)\ OS : 2Fm = MR : Mm.$$

Rurſus in ſimilibus triangulis $l$SQ, $l$LN habetur

$$SQ : LN = Sl : Ll$$

erit ergo ob LN $=$ 2LM $=$ 2FM

$$SQ : 2FM = Sl : Ll.$$

Ad haec in ellipſi ob Z$l$ parallelam ad $z$S: et in hyperbola ob ſimilia triangula LZ$l$, L$z$S, habetur illic ſubtrahendo, hic componendo

$$Sl : Ll = Zz : LZ = mR : Mm:$$

ergo conferendo duas poſtremas proportiones erit

2) $SQ : 2Fm = mR : Mm$.

Iam multiplicando proportiones n. 1 et 2, erit

$OS \times SQ : 4Fm \times FM = MR \times mR : Mm^2$; et altern.

$OS \times SQ : MR \times mR = 4Fm \times FM : Mm^2$, ſeu

$OS \times SQ : MR \times mR = Fm \times FM : \frac{1}{4}Mm^2 = Fm \times FM : MC^2$.

Eſt vero $Fm \times FM = CX^2$ (618), ergo hoc ſubſtituto erit

3) $OS \times SQ : MR \times mR = CX^2 : MC^2$.

Denique cum OQ bifariam ſecta ſit in R, et non bifariam in S, erit $RS^2 + OS \times SQ = RQ^2$ (426) $= FP^2 = FR^2 + RP^2 = RS^2 + RP^2$; tollendo ergo vtrinque $RS^2$, erit $OS \times SQ = RP^2$; hoc ergo ſubſtituendo in proportione n. 3. erit

$RP^2 : MR \times mR = CX^2 : MC^2$.

628. Coroll. 1. Si ergo axis maior ſit $= 2a$, minor $= 2b$, $RP = y$, $MR = x$, erit $mR$ in ellipſi $= 2a - x$, in hyperbola $= 2a + x$; hinc $y^2 : 2ax \mp x^2 = b^2 : a^2$; , et $y^2 = \frac{2b^2x}{a} \mp \frac{b^2x^2}{a^2}$. Adparet hinc rurſus origo vocabulorum ellipſeos, et hyperbolae.

629. Coroll. 2. Et quia ratio $b^2 : a^2$ conſtans eſt, erunt quadrata ſemiordinatarum, vt facta abſciſſarum correſpondentium.

630. Coroll. 3. Cum $FV$ ſit ſemiordinata, erit $FV^2 : FM \times Fm$ ſeu $CX^2 = CX^2 : CM^2$ (527) : ergo rectae $FV$, $CX$, $CM$, adeoque etiam earum duplae $uV$, $xX$, $Mm$ ſunt continue

proportionales (213): quare $uV : Mm = uV^2 : xX^2 = xX^2 : Mm^2$ (215) $= b^2 : a^2$: ergo etiam $y^2 : 2ax \mp x^2 = uV : Mm$ (628), ſeu ſi parameter $uV$ vocetur $p$, $= p : 2a$; hinc $y^2 = px \mp \frac{px^2}{2a}$. Adparet iterum ratio nominum ellipſeos et hyperbolae.

631. COROLL. 4. Si abſciſſae a centro computentur, ita vt CR ſit $= x$, erit $MR = a + x$, et $mR = a - x$ in ellipſi: et $MR = x - a$, $mR = x + a$ in hyperbola; quare $MR \times mR = \pm a^2 \mp x^2$; vnde $y^2 : \pm a^2 \mp x^2 = b^2 : a^2$ (627), et $y^2 = \pm b^2 \mp \frac{b^2x^2}{a^2}$.

632. COROLL. 5. In ellipſi et hyperbola ſemiordinatae a centro aequaliter diſtantes aequales ſunt. Nam binae abciſſae vnius aequantur binis alterius, adeoque earum facta, et hinc ſemiordinatarum quadrata (629), conſequenter ipſae etiam ſemiordinatae aequales ſunt.

633. COROLL. 6. Axis coniugatus ellipſeos vtrinque terminatur in eiusdem perimetro. Quadratum enim ſemiordinatae per centrum transeuntis $y^2$ eſt ad $CM \times Cm$ ſeu ad $CM^2 = CX^2 : CM^2$ (627), ergo $y^2 = CX^2$, et $y = CX$, terminatur autem $y$ in perimetro (618), ergo et CX. Eodem modo patet alterum punctum $x$ eſſe in perimetro.

Fig. 102. 634. THEOREMA. *Si ſuper axe maiore ellipſeos* AB *tanquam diametro deſcribatur ſemicirculus, erit quaeuis ſemiordinata circuli ad corre-*

*ſpondentem ſemiordinatam ellipſeos, vt axis maior ad minorem.*

DEMONSTR. Eſt enim $MP^2 : Np^2 = AP \times PB : Ap \times pB$ (420), et $mP^2 : np^2 = AP \times PB : Ap \times pB$ (629): ergo $MP^2 : Np^2 = mP^2 : np^2$, et alternando $MP^2 : mP^2 = Np^2 : np^2$, ſeu $MP : mP = Np : np$, ac loco MP ponendo AP, erit $AP : mP = 2AP : 2mP = Np : np$.

635. PROBLEMA. *Inuenire parametrum axis maioris in ellipſi, et hyperbola.*

RESOLUT. Cum ſit $y^2 = \frac{2b^2x}{a} \mp \frac{b^2x^2}{a^2}$ (628) et $b^2 = 2ac \mp c^2$ (619), ſi hic valor illic ſubſtituatur, erit $y^2 = 4cx \mp \frac{2c^2x}{a} \mp \frac{2cx^2}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}$. Quia vero parameter eſt ordinata per focum tranſiens (618), pro eius abſciſſa $x$ ſubſtitui poteſt $c$, ſeu diſtantia foci a vertice: erit ergo $y^2 = 4c^2 \mp \frac{4c^3}{a} + \frac{c^4}{a^2}$, vnde extrahendo radicem, erit $y = 2c \mp \frac{c^2}{a}$, et $2y = p = 4c \mp \frac{2c^2}{a}$.

636. COROLL. Quodſi in reperta formula pro $c^2$ ſubſtituatur $\pm 2ac \mp b^2$, (619) erit $p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a}$: ergo tollendo fractionem, $2ap = 4b^2$; quare $2a : 2b = 2b : p$ (204), hoc eſt, parameter axis maioris eſt tertia proportionalis ad axem maiorem, et minorem.

637. THEOREMA. *In ellipſi et hyperbola quaeuis recta per centrum ducta, et vtrinque in perimetro terminata in ipſo centro biſecatur.*

Fig. 103, 104. DEMONSTR. Ducatur enim recta CP ex centro C, ac ſemiordinata PR; tum fiat $Cr = CR$, et ducatur ſemiordinata $rp$, iunganturque puncta C et $p$ recta $Cp$, erit $RP = rp$ (632), quare ob $Cr = CR$ per conſtr. et angulos ad R et $r$ aequales, aequalia erunt triangula PCR, $pCr$ (374), ac proinde anguli ad C aequales, et $CP = Cp$. Cum ergo recta PC producta debeat efficere angulum ad verticem aequalem angulo PCR $= pCr$, debet neceſſario abire in rectam $Cp$, et terminari in $p$: ergo recta $Pp$ in centro biſecatur.

738. THEOREMA. *In ellipſi, et hyperbola axis coniugatus omnes ſuas ordinatas biſecat.*

Fig. 105, 106. DEMONSTR. Sit enim $CR = Cr$, erit $RP = rp$ (632); hinc $Pp = Rr$, eademque $Pp$ eſt ordinata axis coniugati $xX$; praeterea $PI = RC$, et $pI = rC$: ergo etiam $PI = pI$. Eodem modo patet, rectam $Gg$ eſſe eiusdem ordinatam, et biſecari in puncto $i$.

639. COROLL. Ordinatae axis coniugati a centro aequaliter diſtantes aequales ſunt. Nam ob $PR = GR$ eſt $CI = Ci$, et tam $Pp$, quam $Gg = Rr$; ergo $Pp = Gg$.

640. THEOREMA. *In ellipſi quadratum ſemiordinatae axis coniugati eſt ad factum ſuarum abſciſſarum, vt quadratum ſemiaxis maioris ad quadratum ſemiaxis minoris.*

DEMONSTR. Eſt enim $RP^2$ ſeu $CI^2 : RM \times Rm = CX^2 : CM^2$ (627), et alternando, $CI^2 : CX^2 = RM \times Rm : CM^2$; atqui ob axem $Mm$

biſariam ſectum in C, et non biſariam in R eſt $CM^2 = CR^2 + RM \times Rm$ (426): ergo valorem hunc ſubſtituendo, et ſimul proportionem inuertendo erit $CX^2 : CI^2 = CR^2 + RM \times Rm : RM \times Rm$, tum ſubtrahendo $CX^2 - CI^2$ ſeu $IX \times Ix$ (cit.): $CX^2 = CR^2 : CM^2 = IP^2 : CM^2$; denique inuertendo ſimul et alternando, $IP^2 : IX \times Ix = CM^2 : CX^2$.

641 THEOREMA. *In hyperbola quadratum ſemiordinatae axis coniugati eſt ad ſummam quadratorum ſemiaxis coniugati et abſciſſae a centro computatae, vt quadratum ſemiaxis maioris ad quadratum ſemiaxis minoris.*

DEMONSTR. Eſt enim ob axem $Mm$ biſariam ſectum in C, et eidem adiectam MR, $CR^2 = CM^2 + RM \times Rm$ (426), et hinc $RM \times Rm = CR^2 - CM^2$: ſi ergo hic valor ſubſtituatur in proportione $RP^2$ ſeu $CI^2 : CX^2 = RM \times Rm : CM^2$ (627), erit $CI^2 : CX^2 = CR^2 - CM^2 : CM^2$, et componendo, $CI^2 + CX^2 : CX^2 = CR^2$ ſeu $IP^2 : CM^2$; denique inuertendo ſimul et alternando, $IP^2 : CI^2 + CX^2 = CM^2 : CX^2$. Fig. 106.

642. Si per hyperbolae verticem ducatur recta AB ordinatae $Mm$ parallela, et axi coniugato aequalis, nempe vt tam pars AD, quam pars DB ſemiaxi coniugato aequetur; tum per centrum C et per puncta A et B ducantur rectae indefinitae KN et GH: hae adpellantur *aſymptoti* hyperbolae. Fig. 107.

643. THEOREMA. *Aſymptoti cum hyperbola nunquam concurrunt.*

DEMONSTR. Si axis tranſuerſus DR vocetur $a$, parameter eiusdem $p$, erit $AD^2 = \frac{1}{4}ap$ (636), $AD = \sqrt{\frac{1}{4}ap}$: et ſi DP ſit $= x$, erit $CP = \frac{1}{2}a + x$. Ad haec ob ſimilia triangula CDA, CPE eſt CD: DA = CP: PE, ſeu $\frac{1}{2}a : \sqrt{\frac{1}{4}ap} = \frac{1}{2}a + x$: PE, hinc $PE = (\frac{1}{2}a \times \sqrt{\frac{1}{4}ap} + x\sqrt{\frac{1}{4}ap}) : \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}ap} + \frac{x\sqrt{\frac{1}{4}ap}}{\frac{1}{2}a}$ $= \sqrt{\frac{1}{4}ap} + \frac{2x\sqrt{\frac{1}{4}ap}}{a}$; ergo $PE^2 = \frac{1}{4}ap + px + \frac{px^2}{a}$, et $PM^2 = px + \frac{px^2}{a}$ (630), nimirum hic $a$ totum axem deſignante: quare $PE^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ap = AD^2$. Cum ergo $PE^2 - PM^2 = AD^2$, fieri nequit, vt haec quadratorum differentia, adeoque vt ME euadat $= o$ ſecus foret $AD^2 = o$; ergo nequit aſymptotus concurrere cum hyperbola.

644. THEOREMA. *Axis coniugatus diuidit ellipſim in duas partes aequales, et ſimiles. Ambo item hyperbolae rami ſunt inter ſe aequales, et ſimiles.*

Fig. 105. DEMONSTR. Nam ſi ſuper axe coniugato $xX$ pars ſuperior ellipſis conuerti concipiatur, ita vt vertex M abeat in $m$, quaeuis RP congruet cum $rp$ (632), et quaeuis IP cum I$p$ (638): ergo pars ſuperior ellipſis congruet cum inferiore. Eadem eſt in Fig. 106 pro hyperbola demonſtratio.

645. THEOREMA. *Ellipſis et hyperbola alium praeterea habent focum ac directricem a centro, et ab alteris verticibus aeque diſtantes, haben-*

*teſque eaſdem plane proprietates, quas prior focus, et directrix.*

DEMONSTR. Fiat enim $Cf = CF$, $Ce = CE$, et ducatur per punctum $e$ recta $ab$ perpendicularis axi maiori. Deinde concipiatur tota figura circa axem $xX$ conuerti; abibit directrix AEB in $aeb$, vertex M in $m$, focus F in $f$, et quaeuis perimetri puncta erunt in iisdem locis, in quibus alia puncta ante fuerunt: ergo omnia, quae reſpectu omnium perimetri punctorum ad focum F, et directricem AB relatorum verificabantur, iam verificabuntur relate ad focum $f$, et directricem $ab$. Praeterea ob $CM = Cm$, $CF = Cf$, et $CE = Ce$, erit $ME = me$, $MF = mf$, ac $Me = mE$. Fig. 105. 106.

646. THEOREMA. *Si e binis focis ad idem perimetri punctum ducantur duae rectae, erit in ellipſi earum ſumma, in hyperbola earum differentia aequalis axi maiori.*

DEMONSTR. Ducantur enim e focis F et $f$ ad quoduis perimetri punctum P rectae FP, P, et recta PD axi maiori parallela occurrens directricibus in punctis D et $d$, erit

1) $FP : PD = FM : ME$ (608), et

2) $fP : Pd = fm : me = FM : ME$ (cit.) ergo

3) $FP : PD = fP : Pd$; et hinc in ellipſi

4) $FP + fP : PD + Pd = FP : PD = FM : ME$ (214)

Atqui $PD + PD = Dd = Ee$, hoc ergo ſubſtituto erit

ſemiſumma $a$, erit (168 ex. 2) $FM = a - a + c + x - \frac{cx}{a} = c + x - \frac{cx}{a}$.

648. Coroll. 2. Si in hyperbola fiat haec proportio: $fF : fM + FM = fM - FM : fP - FP$ (cit.) ſeu ponendo $DP = x$, $FD = c$, $DR = 2a$, $2a + 2c : fM + FM = 2a : 2a + 2x$, ac diuidendo per 2, $a + c : \frac{1}{2}fM + \frac{1}{2}FM = a : a + x$, erit $\frac{1}{2}fM + \frac{1}{2}FM = a + c + x + \frac{cx}{a}$: ſi ergo hinc tollatur ſemidifferentia $a$, erit Fig. 107.

$FM = c + x + \frac{cx}{a}$.

649. Problema. *Motu continuo ellipſim deſcribere.* Fig. 105.

Resolut. Capiatur filum aequale axi maiori $Mm$, ac eius extrema defigantur in focis $F$ et $f$, tum ſtylo $P$ filum ſemper probe tenſum circumducatur: erit veſtigium ſtyli $MPXpm$ ellipſis; nam in quouis puncto $P$ ſemper erit $FP + fP$ aequale toti filo, adeoque etiam axi maiori, et hinc quoduis punctum $P$ erit in perimetro ellipſis (646).

650. Problema. *Motu continuo hyperbolam deſcribere.*

Resolut. In focis $F$ et $f$ datis vel aſſumtis defigantur claui, quorum alteri $F$ alligetur extremitas fili $FPD$, extremitate altera $D$ regulae $fD$ alligata, quae regula excedat filum quantitate axis $AB$. Alterum regulae extremum perforatum imponatur clauo $f$, et ſtylo $P$ ad filum adplicato regula primum ad ſiniſtram, Fig. 108.

deinde ad dextram emoueatur: eodemque modo pro altero hyperbolae ramo procedatur filo in $f$ deligato, et regulae extremitate clauo F impoſita: veſtigium ſtyli APM erit hyperbola. Nam ex hypotheſi $fP + PD = FP + PD + AB$; hinc $fP = FP + AB$, adeoque $fP - FP = AB$; ergo quoduis punctum P erit in perimetro hyperbolae (646).

651. Problema. *Motu continuo parabolam deſcribere.*

Fig. 109. Resolut. Loco directricis adplicetur regula AB, eique admoueatur norma HDI, cuius breuius crus DI excurrat iuxta ipſam regulam, alteri vero DH affigatur in H extremitas fili HPF, cuius longitudo aequetur cruri normae longiori DH; alterum autem fili extremum defigatur in foco dato, vel aſſumto F: tum norma iuxta regulam AB progrediente detineatur filum ſtylo P penes normam diſtentum: erit veſtigium ſtyli MPN parabola. Nam ex conſtr. $FP + PH = DP + PH$: ergo $FP = PD$, adeoque quoduis punctum P erit in perimetro parabolae (608). Deſcripto arcu dimidio poterit conuerſione normae alterum dimidium eodem modo deſcribi.

652. Problema. *Datis axibus inuenire focos ellipſeos, aut hyperbolae: vel datis focis, et axe maiore minorem reperire.*

Fig. 105. Resolut. *Pro ellipſi.* Radio MC centro $x$ ſecetur axis maior in punctis F et $f$, erunt haec foci. Erit enim $CF^2 = Fx^2 - Cx^2 = CM^2 - Cx^2$; adeoque CF eſt diſtantia foci a centro (623): Si axis minor quaeratur, centro

F

F radio MC ſecetur recta perpendicularis per centrum ducta in punctis X et $x$, erit $x$X axis quaeſitus (622); nam $Cx^2 = Fx^2 - CF^2 = CM^2 - CF^2$.

*Pro hyperbola.* Interuallo MX centro C ſecetur axis maior in punctis F et $f$, erunt haec foci. Erit enim $MX^2 = CF^2 = CM^2 + CX^2$, adeoque CF diſtantia foci a centro (623). Si axis minor quaeratur, radio CF centro M ſecetur recta perpendicularis per centrum ducta in punctis X et $x$, erit $x$X axis quaeſitus (622); nam $CX^2 = MX^2 - CM^2 = CF^2 - CM^2$. Fig. 106.

# CAPUT II.

## *De ſectionibus conicis ad tangentes relatis.*

653. Sectionis conicae *tangens* eſt recta TS, cuius vnicum punctum M eſt in perimetro ſectionis, cetera vero omnia extra eandem. Pars axis TP inter punctum concurſus T cum tangente, et inter ſemiordinatam MP e puncto contactus M ad axem ductam intercepta *ſubtangens* dicitur. Recta MQ, tangenti in puncto contactus perpendicularis, et in axe terminata *normalis* vocatur. Pars axis PQ inter normalem, et ſemiordinatam e puncto contactus ductam intercepta *ſubnormalis* adpellatur. Fig. 110, 111, 112.

Fig. 110. 654. PROBLEMA. *Ad datum parabolae punctum* M *tangentem ducere.*

RESOLUT. E dato puncto M ducatur ad focum F recta MF, item alia MG axi parallela et = MF: tum angulus FMG ab his rectis comprehenſus biſecetur per rectam TS, erit ea tangens.

DEMONSTR. Nam 1) eam in vnico puncto M occurrere parabolae ſic oſtenditur. Sumatur quoduis aliud eiusdem punctum *m*, ductis rectis *m*F, *mg*, *m*G, erunt in triangulis FM*m*, GM*m* anguli ad M aequales, vtpote aequalium FMT, GMT ſupplementa; praeterea FM = MG, et M*m* = M*m*: ergo *m*F = *m*G (374); atqui *m*G > *mg* (368), ergo etiam *m*F > *mg*, et hinc punctum *m* non eſt in parabola. (608).

2) Punctum *m* extra parabolam eſſe ſic oſtenditur. Ducta recta F*g*, ob F*m* > *mg* erit angulus F*gm* > *m*F*g* (368): ſi ergo fiat in F angulus KF*g* = *mg*F, vt ſane eſſe debet in parabola, recta KF magis deorſum cadit verſus axem, quam recta *m*F; vt ergo recta *mg* attingat rectam KF, eique aequalis fiat, neceſſe eſt eam producere citra tangentem TS, adeoque punctum concurſus, quod erit in parabola (603), inter tangentem et axem iacet: ergo punctum *m* eſt extra parabolam. Eadem eſt de quouis alio rectae TS puncto demonſtratio.

655. COROLL. 1. Cum aequentur triangula FMI, GMI, recta FG a tangente in puncto I bifariam, et perpendiculariter ſecatur.

656. COROLL. 2. Erunt ergo QM et FG parallelae (313), et FQ = GM = FM.

657. Coroll. 3. Subtangens TP aequatur duplae abſciſſae ſeu 2AP. Nam ob angulos alternos TMG, PTM aequales, item TMG, TMF itidem aequales, erit angulus PTM = TMF, et hinc TF = FM (369) = MG = CP: ſi ergo ex aequalibus TF et CP tollatur idem CF, erit TC = FP, ac vtrinque addendo aequales CA et AF (608), erit TA = AP, et hinc TP = 2AP.

658. Coroll. 4. Normalis MQ eſt dupla perpendiculi FI e foco in tangentem demiſſi. Nam MQ = FG, et FG = 2FI (655): ergo MQ = 2FI.

659. Coroll. 5. Subnormalis PQ aequatur ſemiparametro axis. Nam in triangulis ſimilibus (417) CFG, PQM, cum ſit GF = MQ, et CG = PM, erit CF, ſeu ſemiparameter (620) = PQ.

660. Coroll. 6. Triangula TAI, INM aequalia ſunt, cum praeter omnes angulos aequales inſuper ſit TA ſeu AP (657) = NM. Si ergo vtrique triangulo addatur idem ſpatium APMI, erit triangulum PTM = rectangulo APMN.

661. Problema. *Ad datum ellipſeos punctum M tangentem ducere.* Fig. 112.

Resolut. Ducantur ex focis F et *f* ad punctum datum M rectae FM et *fm*, quarum poſterior producatur, donec ſit MR = FM; tum angulus FMR biſecetur per rectam TS, erit ea tangens.

Demonstr. Nam 1) eam in vnico puncto occurrere ellipſi ſic oſtenditur. Sumatur quodvis aliud eiusdem punctum *m*, ductis rectis F*m*,

*fm*, R*m*, erunt in triangulis FM*m*, RM*m* praeter angulos ad M aequales etiam latera FM et RM, item M*m* et M*m* aequalia: ergo etiam F*m* = *m*R (374): atqui *fm* + *m*R > *f*R (274), ſeu *fm* + F*m* > *f*R ſeu > *f*M + FM, quae tamen ſummae in ellipſi deberent axi maiori (646), adeoque et ſibi aequales eſſe: ergo punctum *m* non eſt in ellipſi.

2) Eſſe vero idem punctum extra ellipſim ex eo ipſo perſpicuum eſt, quod *fm* + F*m* ſit > *f*M + FM: ſi enim punctum *m* eſſet intra ellipſim, prior ſumma minor foret poſteriore. Eadem eſt de quouis alio rectae TS puncto demonſtratio.

Fig. 112. 662. PROBLEMA. *Ad datum hyperbolae punctum M tangentem ducere.*

RESOLUT. Ducantur ex focis F et *f* ad punctum datum M rectae FM, et *f*M, e quarum poſteriore reſecetur MR = FM; tum angulus FMR biſecetur per rectam TS, erit ea tangens.

DEMONSTR. Nam 1) eam in vnico puncto M occurrere hyperbolae ſic oſtenditur. Sumatur quoduis aliud eiusdem punctum *m*, ductis rectis F*m*, *fm*, R*m*, erunt in triangulis FM*m*, RM*m* anguli ad M aequales, vtpote aequalium FMT, TMR ſupplementa; praeterea ex conſtr. FM = MR, M*m* = M*m*: ergo etiam F*m* = R*m* (374). Iam ſi punctum *m* eſſet in hyperbola, deberet eſſe *fm* — F*m* = *f*M — FM = *f*R (646); ſed ſi *fm* — F*m* eſſet = *f*R, tunc *fm* eſſet = *f*R + F*m* = *f*R + R*m*, quod abſur-

dum eſt(274): ergo punctum $m$ non eſt in hyperbola.

2) Eſſe vero idem punctum extra hyperbolam ſic demonſtratur. Cum ſit $fR + Rm > fm$, ſi fiat $mO = mR$; erit $fO < fR$; hinc differentia $fm - Fm = fm - Rm = fO$ eſt minor quam axis $AB = fR$: ac proinde recta $Fm$ eſt iuſto maior. Atqui ſi centro $f$ radio $fm$ deſcribatur arcus $mH$, vt $Fm$ minuatur relate ad $fm$, oportet radium $fm$, ſeu punctum $m$ accedere verſus H: cum enim punctum F ſit in radio $fH$, linea breuiſſima, quae ex F ad peripheriam $mH$ duci poteſt, eſt FH, ceterae tanto maiores ſunt, quanto ab hac magis recedunt (335): vt ergo minuatur $Fm$ relate ad $fm$, ſeu vt punctum $m$ veniat ad hyperbolam, debet $Fm$ cadere inter $m$ et H: ergo nunc punctum $m$ eſt extra hyperbolam. Eadem eſt de quouis alio rectae TS puncto demonſtratio.

663. Coroll. 1. Anguli, quos in parabola rectae RM et FM, in ellipſi et hyperbola rectae $fM$ et FM e binis focis ad punctum contactus ductae faciunt cum tangente TS, aequales ſunt inter ſe. Nam in parabola angulus $FMT = TMG = RMS$. In ellipſi $TMF = TMR = fMS$. In hyperbola FMR a tangente biſectus eſt; ergo $DMS = fMT = TMF$. Fig. 110, 111, 112.

664. Coroll. 2. E Phyſica notum eſt lucem ſub eo angulo reflecti e ſpeculis, ſub quo in eadem incidit. Si ergo radii per rectas RM axi parallelas incidant in ſpeculum parabolicum, reflectentur ad focum F: et contra, ſi e foco F diuergentes incidant, exibunt e ſpeculo axi paralleli. Si radii e foco $f$ ſpeculi el-

liptici venientes incidant in ſpeculum, colligentur in altero foco F, et contra. Si demum radii in ſpeculum hyperbolicum incidant directione DM ad focum $f$ tendente, colligentur in altero foco F: et ſi e foco F diuergant, ea directione reflectentur a ſpeculo, ac ſi e foco $f$ directe venirent.

665. PROBLEMA. *Inuenire ſubnormalem in ellipſi et hyperbola.*

Fig. 111. 112. RESOLUT. Cum recta FR tangenti perpendicularis ſit (661, 662), erit parallela normali MQ, et hinc ſimilia triangula $f$RF, $f$MQ: ergo $f$R: $f$F = RM ſeu FM: FQ; eſt autem $f$R aequalis axi maiori $= 2a$, $fF = 2a \mp 2c$, $FM = c + x \mp \frac{cx}{a}$ (647, 648), quare his ſubſtitutis erit $2a : 2a \mp 2c = c + x \mp \frac{cx}{a}$: FQ; vnde obtinetur $FQ = c + x \mp \frac{c^2}{a} \mp \frac{2cx}{a} + \frac{c^2x}{a^2}$. Iam cum PQ ſit = FQ — FP, et $FP = x - c$, erit $PQ = 2c \mp \frac{c^2}{a} \mp \frac{2cx}{a} + \frac{c^2x}{a^2}$. Quodſi pro $c^2$ ſubſtituatur $\pm 2ac \mp \frac{1}{2}ap$ (635), erit $PQ = \frac{1}{2}p \mp \frac{px}{2a}$.

666. COROLL. 1. Si pro $p$ ſubſtituatur $\frac{2b^2}{a}$ (636), erit $PQ = \frac{b^2}{a} \mp \frac{b^2x}{a^2}$.

667. COROLL. 2. Si abſciſſa a centro C computetur, ſitque $CP = x$, in praecedente formula loco $x$, quod in ea ſignificabat BP, ponendum erit $\pm a \mp x$, et habebitur $PQ = \frac{b^2 x}{a^2}$.

668. COROLL. 3. Cum ſit $MQ^2 = PM^2 + PQ^2$, ponendo pro $PM^2 \pm b^2 \mp \frac{b^2 x^2}{a^2}$ (631), et pro $PQ^2$ ponendo quadratum formulae praecedentis $\frac{b^4 x^2}{a^4}$, erit $MQ^2 = \pm b^2 \mp \frac{b^2 x^2}{a^2} + \frac{b^4 x^2}{a^4} = \frac{\pm a^4 b^2 \mp a^2 b^2 x^2 + b^4 x^2}{a^4}$.

669. PROBLEMA. *Inuenire ſubtangentem in ellipſi, et hyperbola.*

RESOLUT. Quoniam in triangulo rectangulo TMQ ex angulo recto M demiſſa eſt in hypotenuſam perpendicularis MP, erit $PQ : PM = PM : PT$ (431), vnde $PT = \frac{PM^2}{PQ}$: eſt autem $PM^2 = px \mp \frac{px^2}{2a}$ (630), et $PQ = \frac{1}{2} p \mp \frac{px}{2a}$ (665): ergo his valoribus ſubſtitutis, erit $PT = \frac{2ax \mp x^2}{a \mp x}$.

670. COROLL. 1. Cum ſit $CP \pm PT = CT$, et $CP = a \mp x$, erit $CT = a \mp x \pm$

$$\frac{2a-x^2}{a\mp x}=\frac{a^2\pm 2ax+x^2\mp 2ax-x^2}{a\mp x}=-\frac{a^2}{a\mp x};$$

hinc $CT\times CP=\frac{a^2}{a\mp x}\times a\mp x=a^2=AC^2$.

671. Coroll. 2. Cum in poſtrema hac formula diſtantia foci a vertice, ſeu $c$ non ingrediatur, patet eam etiam axi minori ellipſeos vel hyperbolae accommodari poſſe, adeoque etiam relate ad illum $CT\times CP$ aequari quadrato ſemiaxis. Imo omnes formulae ſubnormalis ſupra inuentae, et formula ſubtangentis, cum eas diſtantia foci a vertice minime ingrediatur, perinde obtinent etiam in axe minore, dummodo debitae mutationes in literis adhibeantur.

672. Coroll 3. Si abciſſa a centro computata CP ſit $=x$, in formula ſubtangentis $\frac{2ax\mp x^2}{a\mp x}$ loco $x$, quod in ea ſignificabat BP, ponendum erit $\pm a\mp x$; erit ergo PT $=\frac{\pm 2a^2\mp 2ax\mp x^2\pm 2ax\mp x^2}{a-a+x}=\frac{\pm a^2\mp x^2}{x}$.

Fig. 113, 114. 673. Theorema. *Si in ellipſi ac hyperbola ex vtrouis foco demittatur in tangentem perpendicularis* FA *vel* fa, *erit recta* CA *vel* Ca *iungens eius extremum cum centro parallela rectae iunganti punctum contactus cum altero foco* fM *vel* FM.

Demonstr. Ponamus enim rectas CA, FR, $f$M parallelas eſſe, oſtendendum erit rectam FA eſſe ad tangentem perpendicularem. Ducatur per centrum C tangenti parallela occur-

rens rectis M$f$, MF, RF in punctis $b$, B, S, erit ob CF $=$ C$f$ triang. FSC $=$ $f$C$b$ (377), hinc CS $=$ C$b$, AM $=$ AR, FS $=$ $fb$; cumque aequentur anguli FMT, $f$M$t$ (663), et FR$t$ ſit $=$ $f$M$t$, erit triangulum FRM iſoſceles, in quo FR $=$ FM (369); igitur triangula FAM, FAR ſibi impoſita congruunt (379), ac proinde anguli ad A vtrinque aequales, et recti ſunt, et hinc FA ad tangentem perpendicularis. Eadem eſt pro rectis FM et C$a$ demonſtratio.

674. Coroll. Recta CA, ac proinde etiam rectae RS, M$b$, CA, et MB aequantur ſemiaxi maiori. Cum enim ſit FS $=$ $fb$, et FR $=$ FM per demonſtr. in ellipſi ſumma FM $+$ M$b$ $+$ $bf$ ſeu axis maior (646) aequatur ſummae FR $+$ M$b$ $+$ FS $=$ SR $+$ M$b$; ſed SR $=$ M$b$, ergo M$b$ et SR, adeoque etiam CA aequantur ſemiaxi maiori. Et quia in triangulo BM$b$ anguli B et $b$ aequantur alternis FMT, $f$M$t$ inter ſe aequalibus (663), et ipſi aequales ſunt; vnde MB $=$ M$b$, et hinc etiam MB aequatur ſemiaxi maiori.

In hyperbola axis maior eſt $=$ $f$M $-$ FM (646); ergo pro $f$M ponendo $fb$ $+$ M$b$ $=$ $fb$ $+$ MB $=$ FS $+$ MB, et pro FM ponendo FR, erit axis maior $=$ FS $+$ MB $-$ FR $=$ RS $+$ MB, atqui RS $=$ MB $=$ M$b$ $=$ CA; ergo RS, MB, M$b$, et CA aequantur ſemiaxi maiori.

675. Theorema. *Si e puncto axis, in quo normalis ei occurrit, demittatur perpendicularis in rectam iungentem punctum contactus cum foco, erit*

# CAPVT. III.

## *De ſectionibus conicis ad diametros relatis.*

676. Diameter ſectionis conicae eſt quaeuis recta per centrum tranſiens, et vtrinque in perimetro terminata. Cum vero parabolae centrum a vertice infinite diſtet (620) eius diameter eſt quaeuis recta e quouis eius puncto ducta, et axi parallela. *Diameter coniugata* dicitur reſpectu alterius diametri; ſi ſit parallela tangenti per alterius extremum ductae. *Semiordinatae* diametrorum ſunt rectae in diametro, et perimetro ſectionis terminatae, et tangenti per extremum diametrorum tranſeunti parallelae. Si per tria puncta proxima ſectionis conicae concipiatur tranſire arcus circuli cum arcu ſectionis inter tria illa puncta congruens, eiuſmodi circulus dicitur ſectionem *oſculari*; hinc eius radius adpellatur *radius oſculi*, vel etiam *radius curuaturae*, cum circuli et ſectionis conicae curuatura in arcu illo exiguo eadem ſit.

677. Theorema. *Si in parabola per extremitatem axis* A, *et diametri* M *ducantur tangentes* AG *et* TM, *et his per quodcunque perimetri punctum* E, e, *vel* H *agantur parallelae, triangula his parallelis et axe comprehenſa aequabuntur rectangulis a tangente axis, eiuſque parallela interaxem et diametrum comprehenſis.* Fig. 117.

DEMONSTR. 1) Si punctum E cadat ſupra M, ducta ſemiordinata MP erunt triangula ſimilia MPT, EDt inter ſe vt $MP^2 : ED^2$ (509) $=$ AP : AD (626); atqui etiam rectangula APMG, ADBG in eadem ratione ſunt (505): ergo triangula illa ſunt vt haec rectangula; ſed triangulum MPT aequatur rectangulo APMG (660); ergo etiam triangulum EDt $=$ ADBG.

2) Si punctum *e* cadat infra M, erunt triangula ſimilia MPT, *e*O*t* inter ſe vt $MP^2 : eO^2 =$ AP : AO $=$ APMG : AOLG; ſed MPT $=$ APMG: ergo *e*O*t* $=$ AOLG.

3) Si punctum H cadat in aliud crus parabolae, erunt triangula ſimilia MPT, NHK, vt $MP^2 : NH^2 = MP^2 : NR^2 =$ AP : AN $=$ APMG : ANFG; ſed MPT $=$ APMG; ergo etiam NHK $=$ ANFG.

678. THEOREMA. *In eodem caſu triangulum comprehenſum a tangentium parallelis et diametro aequatur rectangulo, quod vna parallelarum efficit cum diametro, axe, et tangente diametri.*

DEMONSTR. 1) Si punctum E cadat ſupra M, cum TPM ſit $=$ APMG (660), tollatur ab vtroque ſpatium DPMP, erit TCD $=$ GMI $+$ IADC; tollatur ab horum primo triangulum ED*t*, a ſecundo ſpatium ADBG, quae aequalia ſunt (677) reſtabit TCE*t* $=$ BCM, quibus ſi addas CMSE, erit BES $=$ TMS*t*.

2) Si punctum *e* cadat infra M, ex *e*O*t*, AOLG aequalibus (cit.) tolle ED*t*, ADBG aequalia (cit.), habebis DE*e*O $=$ DOLB, e quibus ſi demas DESLO, obtinebis *e*SL $=$ BES $=$ TMS*t*.

3) Si punctum H cadat in aliud parabolae crus, cum ſit NKH = ANFG (cit.), tolle NKH ex HFQ, et eius loco adde ANFG, erit GAKQ = HFQ. Si ergo e priore demas GIM, et ſubſtituas aequale TIA (660), habebis HFQ = TMQK.

679. Theorema. *Diameter* MS *biſecat ſuas ordinatas.*

Demonstr. Cum enim aequentur triangula *e*SL, BES (678), ſintque aequiangula, erit *e*S = ES, id quod in quauis alia ordinata obtinet.

680. Theorema. *In parabola quadrata ſemiordinatarum ad quamuis diametrum ſunt vt abſciſſae.*

Demonstr. Nam triangula ſimilia BES, FHQ ſunt inter ſe vt $SE^2$: $QH^2$ (509); atqui triangulum BES = TMS*t*, et FHQ = TMQK (678); ergo etiam haec parallelogramma ſunt inter ſe vt $SE^2 : QH^2$; ſed eadem etiam ſunt vt MS : MQ (505): ergo $SE^2 : QH^2 = MS : MQ$.

681. Coroll. Ratio haec non mutabitur, ſi abſciſſae ducantur in rectam quandam conſtantem (190), quae ſi ſit tertia proportionalis ad quamcunque abſciſſam, et eius ſemiordinatam, erit quadratum ſemiordinatae aequale facto ex abſciſſa in eam rectam, quam vocamus diametri parametrum (625): vnde quadratum ſemiordinatae diametri aequatur facto ex parametro in abſciſſam: et quadrata ſemiordinatarum ſunt vt abſciſſae.

682. Theorema. *Parameter diametri aequatur quadruplae diſtantiae foci a vertice diametri.*

Demonstr. Sit enim parameter axis = $p$, parameter diametri = $q$, ducaturque ex vertice parabolae ad diametrum ſemiordinata RA, erit Fig. 118.

RA $=$ MT, et MR $=$ TA $=$ AP (657); atqui $MT^2 = MP^2 + TP^2 = px + 4x^2$ (624, 657), et $p = 4NA$ (620), $x =$ AP; ergo $MT^2$ ſeu $RA^2 = 4NA \times AP + 4AP^2$; ſed $RA^2$ etiam $= MR \times q$ (681) $= AP \times q$; ergo $4NA \times AP + 4AP^2 = AP \times q$, et diuidendo per AP; $4NA + 4AP = 4DM = 4MF = q$.

683. Coroll. Eaſdem adeo proprietates habet parabola relate ad diametrum, quas relate ad axem habere in ſuperioribus vidimus.

Fig. 119. 120. 684. Theorema. *Si ab extremis punctis diametrorum coniugatarum* MN *et* BA *ducantur ſemiordinatae* MP *et* BD *ad axem maiorem ellipſis vel hyperbolae, quadratum abſciſſae vnius a centro computatae* $CD^2$ *aequabitur facto abſciſſarum alterius ſemiordinatae* RP $\times$ *r*P.

Demonstr. Sit axis $Rr = 2a$, $CP = x$, $CD = u$, erit $rD = a \pm u$, $RD = a \mp u$. Eſt autem in ellipſi $RP \times rP : RD \times rD = PM^2 : BD^2$ (629), ſeu $a^2 - x^2 : a^2 - u^2 = PM^2 : BD^2$ et in hyperbola $RP \times rP : CR^2 + CD^2 = PM^2 : BD^2$ (641), ſeu $x^2 - a^2 : a^2 + u^2 = PM^2 : BD^2$; atqui ob triangula TPM, BCD ſimilia eſt $PM^2 : BD^2 = TP^2 : CD^2$: ergo etiam $\pm a^2 \mp x^2 : a^2 \mp u^2 = TP^2 : CD^2 = \frac{(\pm a^2 \mp x^2)^2}{x^2}$ (672) $: u^2$; ergo $(\pm a^2 \mp x^2)\, u^2 = (a^2 \mp u^2) \frac{\times (\pm a^2 \mp x^2)^2}{x^2}$, et diuidendo per $\pm a^2 \mp x^2$, $u^2 = (a^2 \mp u^2) \times \frac{(\pm a^2 \mp x^2)}{x^2}$, tollendo fractionem, et reipſa multiplicando, $u^2 x^2 = \pm a^4 - a^2 u^2 \mp a^2 x^2 +$

$u^2x^2$, tollendo vtrinque $u^2x^2$, tum omnia diuidendo per $a^2$ erit $o = \pm a^2 - u^2 \mp x^2$; vnde $u^2 = \pm a^2 \mp x^2 = RP \times rP$. Eodem modo oſtenditur eſſe $RD \times rD = CP^2$.

685. Coroll. 1. Cum ergo in elipſi ſit $a^2 : b^2 = RD \times rD : BD^2$ (627) $= CP^2$ ſeu $x^2 : BD^2$, erit $BD^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$. Eſt autem $CM^2 = CP^2 + PM^2 = x^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$ (631): et $CB^2 = CD^2 + BD^2 = a^2 - x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}$. Hinc $CM^2 + CB^2 = b^2 + a^2$.

686. Coroll. 2. Cum in hyperbola ſit $a^2 : b^2 = CR^2 + CD^2$ ſeu $a^2 - a^2 + x^2$ (684) ſeu $x^2 : BD^2$ (641), erit $BD^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$ Eſt autem $CM^2 = CP^2 + PM^2 = x^2 - b^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}$ (631), et $CB^2 = CD^2 + BD^2 = x^2 - a^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}$. Hinc $CB^2 - CM^2 = b^2 - a^2$.

687. Coroll. 3. Quoniam $CM^2 = CP^2 + MP^2 = x^2 \pm b^2 \mp \frac{b^2x^2}{a^2}$; erit $CB^2 = \frac{b^2 x^2 \mp a^2x^2 \pm a^4}{a^2}$; nempe pro ellipſi ex $CM + CB^2 = b^2 + a^2$ tollendo $CM^2$: in hyperbola ad $CB^2 - CM^2 = b^2 - a^2$ addendo $CM^2$.

688. Coroll. 4. Cum ergo fuerit $MQ : CL = CL : MR$, ſeu $MQ^2 : CL^2 = CL^2 : MR^2$ (675), Fig. 115.

et ſit $MQ^2 = \pm \frac{a^4b^2 \mp a^2b^2x^2 + b^4x^2}{a^4}$ (668), et $CL^2 = b^2$, erit $MR^2 = \frac{a^4b^2}{b^2x^2 \pm a^4 \mp a^2x^2}$. Si ergo $MR^2$ ducatur in $CD^2$ (quod in priore corollario fuit $CB^2$), cuius valor priore corollario eſt inuentus, erit $MR^2 \times CD^2 = a^2b^2 = CA^2 \times CL^2$: hinc $MR : CL = CA : CD$, adeoque $MR = \frac{CL \times CA}{CD}$

689. Theorema. *In ellipſi et hyperbola quadratum ſemiordinatae ad diametrum adplicatae eſt ad factum ſuarum abſciſſarum, vt quadratum ſemidiametri coniugatae ad quadratum ſemidiametri propriae, ſeu* $FO^2 : MF \times FN = CB^2 : CM^2$.

Fig. 119. 120. Demonstr. Ductis ad axem maiorem ſemiordinatis MP, BD, OI, demittantur ex puncto F perpendiculares FK et FE. Sit porro $EI = FK = m$, $CE = n$, $CM = d$, erit $IR = IE + ER = m \pm a \mp n$, et $rI = rE \mp IE = a \mp m + n$; hinc $IR \times rI = 2mn \pm a^2 \mp m^2 \mp n^2$. Ad haec ob ſimilia triangula CPM, CEF erit $CP : CM = CE : CF$, ſeu $x : d = n : CF$; ergo $CF = \frac{dn}{x}$; quare $MF = \pm MC \mp CF = \pm d \mp \frac{dn}{x}$; et $FN = CN + CF = d + \frac{dn}{x}$ (637): ergo $MF \times FN = \pm d^2 \mp \frac{d^2n^2}{x^2}$. His poſitis duo valores quaerendi ſunt de $OI^2$, et inter ſe comparandi.

Igitur

Igitur 1) $OI = IK + KO$: eſt vero in triangulis CPM, CEF ſimilibus $CP : PM = CE : EF$ ſeu IK, hoc eſt $x : y = n : IK$; vnde $IK = \frac{ny}{x}$: et in triangulis TPM, KFO ſimilibus (410) $PT : PM = FK : KO$, ſeu $\frac{\pm a^2 \mp x^2}{x} : y = m : KO$ (672), vnde $KO = \frac{mxy}{\pm a^2 \mp x^2}$: eſt ergo iam $OI^2 = (IK + KO)^2 = \frac{n^2y^2}{x^2} + \frac{2mny}{\pm a^2 \mp x^2} + \frac{m^2x^2y^2}{(\pm a^2 \mp x^2)^2}$.

2) eſt $RP \times rP : RI \times rI = PM^2 : OI^2$ (629) ſeu $\pm a^2 \mp x^2 : 2mn \pm a^2 \mp m^2 \mp n^2 = y^2 : OI^2$, vnde $OI^2 = \frac{(2mn \pm a^2 \mp m^2 \mp n^2)y^2}{\pm a^2 \mp x^2}$; ergo hunc valorem comparando cum ſupra inuento erit

$$\frac{(2mn \pm a^2 \mp m^2 \mp n^2}{\pm a^2 \mp x^2}y^2 = \frac{n^2y^2}{x^2} + \frac{2mny^2}{\pm a^2 \mp x^2} + \frac{m^2x^2y^2}{(\pm a^2 \mp x^2)^2}$$: diuidendo per $y^2$

$$\frac{2mn \pm a^2 \mp m^2 \mp n^2}{\pm a^2 \mp x^2} = \frac{n^2}{x^2} + \frac{2mn}{\pm a^2 \mp x^2} + \frac{m^2x^2}{(\pm a^2 \mp x^2)^2}$$; tollendo vtrinque

$$\frac{2mn}{\pm a^2 \mp x^2}$$

$$\frac{\pm a^2 \mp m^2 \mp n^2}{\pm a^2 \mp x^2} = \frac{n^2}{x^2} + \frac{m^2x^2}{(\pm a^2 \mp x^2)^2}$$

multiplicando per $\pm a^2 \mp x^2$

$\pm a^2 \mp m^2 \mp n^2 = \pm \frac{a^2 n^2}{x^2} \mp n^2 +$

$\frac{m^2 x^2}{\pm a^2 \mp x^2}$: tollendo vtrinque $\mp n^2$,

$\pm a^2 \mp m^2 = \pm \frac{a^2 n^2}{x^2} + \frac{m^2 x^2}{\pm a^2 \mp x^2}$: multiplicando per $\pm a^2 \mp x^2$,

$a^4 - a^2 x^2 - a^2 m^2 + m^2 x^2 = \frac{a^4 n^2}{x^2} - a^2 n^2 + m^2 x^2$;

tollendo vtrinque $m^2 x^2$,

$a^4 - a^2 x^2 - a^2 m^2 = \frac{a^4 n^2}{x^2} - a^2 n^2$; diuidendo per $a^2$

$a^2 - x^2 - m^2 = \frac{a^2 n^2}{x^2} - n^2$; transponendo $m^2$ vt ſolum ſit,

$a^2 - x^2 + n^2 - \frac{a^2 n^2}{x^2} = m^2 = FK^2$;

Iam dico $MF \times FN : CM^2 = FK^2 : CD^2$; nam ſubſtitutis valoribus $\pm d^2 \mp \frac{d^2 n^2}{x^2}$: $d^2 = a^2 - x^2 + n^2 - \frac{a^2 n^2}{x^2}$ : $\pm a^2 \mp x^2$ (684), erit factum extremorum aequale facto mediorum, ac proinde factores reciproce proportionales (204). Quia vero triangula FKO, CBD ſimilia ſunt (410), erunt latera homologa, adeoque etiam eorum quadrata proportionalia, ſeu $FO^2 : CB^2 = FK^2 : CD^2$: ergo etiam $FO^2 : CB^2 = MF \times FN : CM^2$, et alternando $FO^2 ; MF \times FN = CB^2 : CM^2$.

690. COROLL. Cum ratio $CB^2 : CM^2$ ſit conſtans, patet quadrata ſemiordinatarum eſſe vt facta abſciſſarum correſpondentium, adeoque eaſdem eſſe ellipſeos ac hyperbolae proprietates relate ad diametros, quae ſunt relate ad axem maiorem. Conf. n. 629.

691. PROBLEMA. *Inuenire radium oſculi, ſeu curuaturae ſectionis conicae in quouis puncto.*

RESOLUT. Per datum punctum M ducatur diameter MN, eidemque coniugata HD, tum axes Aa, Ll. Ponamus punctum O diametri MN eſſe in peripheria circuli curuam oſculantis, ſeu per tria eius puncta infinite propinqua n, M, m tranſeuntis, erit ducta chorda nm, $Km^2 = MK \times KO$ (420) cum ſcilicet diameter MS ab MO vix differat: eſt vero $Km^2 : MK \times KN = CD^2 : CM^2$ (689): ergo $MK \times KO : MK \times KN = CD^2 : CM^2$, ſeu $KO : KN = CD^2 : CM^2$. Quia autem MK etiam reſpectu Km eſt quantitas infinite parua, loco KO poteſt poni MO, et loco KN poni $MN = 2CM$ (637); hinc $MO : 2CM = CD^2 : CM^2$; vnde $MO = \frac{2CD^2}{CM}$. Supponatur iam diameter circuli oſculatoris eſſe MS, et ducatur chorda SO, erit triangulum SOM in O rectangulum (345) ſimile triangulo MCR ad R rectangulo ob normalem MQ tangenti, adeoque etiam diametro HD perpendicularem (310): quare $MR : MC = MO$ ſeu $\frac{2CD^2}{CM} : MS$, Fig. 115. 116.

vnde $MS = \frac{2CD^2}{MR}$, et $\frac{1}{2}MS = \frac{CD^2}{MR}$.

692. Coroll. 1. Quoniam $MR = \frac{CL \times AC}{CD}$ (688), valore hoc ſubſtituto erit $\frac{1}{2}$ $MS = \frac{CD^3}{CL \times AC}$.

693. Coroll. 2. Demiſſis e centro, et foco ad tangentem perpendiculis CI et FG, erit $MR^2 : AC^2 = CL^2$ ſeu $MR \times MQ$ (671, 675): $CD^2$ (688): hinc $CD^2 = \frac{AC^2 \times MQ}{MR}$. Si ergo hic valor ſubſtituatur in formula prima (691), erit $\frac{1}{2}MS = \frac{AC^2 \times MQ}{MR^2}$: eſt autem parameter axis $Aa = \frac{2CL^2}{AC}$ (636), ac eius dimidium $\frac{1}{2}p = \frac{CL^2}{AC}$, hinc $\frac{1}{2}p \times AC = CL^2 = MR \times MQ$, adeoque $MR = \frac{p \times AC}{2MQ}$, et $MR^2 = \frac{p^2 \times AC^2}{4MQ^2}$: valore hoc in poſtrema radii formula ſubſtituo erit $\frac{1}{2}$ $MS = \frac{4MQ^3}{p^2} = \frac{MQ^3}{\frac{1}{4}p^2}$:

eſt vero $\frac{1}{4}p^2 = MB^2$ (675), ergo $\frac{1}{2}$ MS $= \frac{MQ^3}{MB^2}$. Atque haec eſt formula radii curuaturae, quam in phyſica P. I. §. 98 adhibuimus, quae valet etiam in parabola, in quam abit ellipſis et hyperbola, ſi earum axis euadat infinitus.

*Finis Elementorum Sectionum Conicarum.*

# INDEX CAPITVM.

## ELEMENTA

# ALGEBRAE.

*PROLEGOMENON*. . . . . . . . . . . . . Pag. 1

## SECTIO I.

De primis quantitatum integrarum, et fractarum Calculis.

CAP. I. *De Additione, et Subtractione quantitatum integrarum*. . . . . . . . . . . . . . . . . 14
CAP. II. *De Multiplicatione, et Diuiſione quantitatum integrarum*. . . . . . . . . . . . . . . 26
CAP. III. *De natura et variis transformationibus Fractionum*. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48
CAP. IV. *De Additione, Subtractione, Multiplicatione, et Diuiſione fractionum*. . . . 55

Pag.

## SECTIO II.

De Compoſitione, et Reſolutione Potentiarum.

CAP. I. *De natura, et geneſi Potentiarum*......66
CAP. II. *De extractione Radicum e potentiis algebraicis*........................82
CAP. III. *De extractione Radicum e numeris*..97
CAP. IV. *De calculo quantitatum Radicalium*..110

## SECTIO III.

De Problematis, et Aequationibus.

CAP. I. *De natura Problematum, et Aequationum*........................122
CAP. II. *De reſolutione problematum, quae ad aequationes ſimplices reducuntur*...... 129
CAP. III. *De reſolutione problematum, quae ad aequationes affectas ſecundi gradus reducuntur*........................151

## SECTIO IV.

De variis quantitatum Relationibus.

CAP. I. *De Rationibus*........................162
CAP. II. *De Proportionibus*................ 167
CAP. III. *De Regula Aurea*................ 176
CAP. IV. *De Progreſſionibus*..............186
CAP. V. *De Logarithmis*..................197
CAP. VI. *De Seriebus*......................209

# ELEMENTA GEOMETRIAE.

Pag.

*PROLEGOMENON*.................219

## SECTIO I.

De Lineis et Angulis.

CAP. I. *De lineis rectis ad ſe invicem comparatis*..........................226
CAP. II. *De lineis rectis ad circulum relatis*..234
CAP. III. *De lineis rectis quatenus ſpatium claudunt*..........................245
CAP. IV. *De linearum proportionibus*........261
CAP. V. *De Trigonometria*..................273
CAP. VI. *De nonnullis Praxibus geometricis, et trigonometricis*..................289

## SECTIO II.

De Superficiebus.

CAP. I. *De geneſi, et aequalitate ſuperficierum*.302
CAP. II. *De comparatione ſuperficierum*.......307
CAP. III. *De vario ſitu, et concurſibus Planorum*..310

Pag.

# SECTIO III.

De Solidis.

CAP. I. *De ſolidorum geneſi, ſuperficie, et ſoliditate*.......................... 317
CAP. II. *De Solidorum comparatione*........332

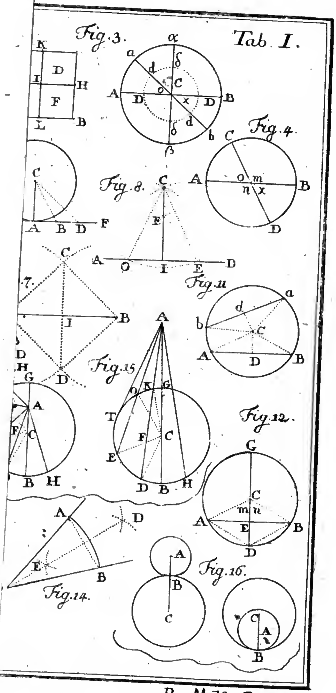
# ELEMENTA SECTIONVM CONICARVM

EXTRA CONVM SPECTATARVM.

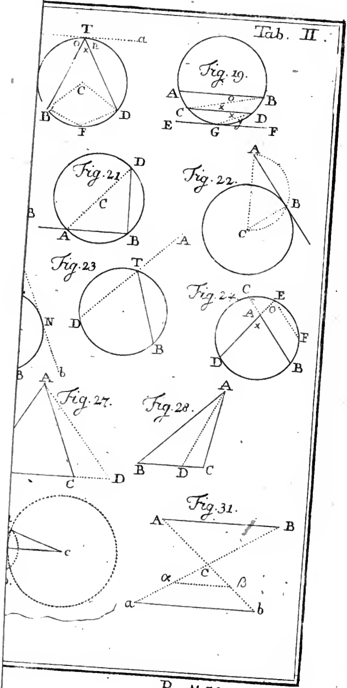
CAP. I. *De ſectionibus conicis ad axes relatis*.335
CAP. II. *De ſectionibus conicis ad tangentes relatis*..........................353
CAP. III. *De ſectionibus conicis ad diametros relatis*........................ 363

# ERRATA.

| Pag. | lin. | *Errores* | *Corrigendi* |
|---|---|---|---|
| 120 | 8 | $\left(\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}\right)^{n}$ | $\left(\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}\right)^{\frac{n}{r}}$ |
| 132 | 26 | luris | lucris |
| Ibid. | 27 | $2xc$ | $2x$ |
| 194 | vlt. | $m-$ | $m=$ |
| 209 | vlt. | $3\infty$ | $3\infty^2$ |
| 222 | 28 | 12 tertia | 13 tertia |
| 228 | 19 | An | A non |
| 293 | 7 | *Mteiri* | *Metiri* |
| 327 | 13 | $eC^2$ | $ec^2$ |
| 337 | 17 | *ei* | E*i* |
| 342 | 5 | ſemioidinata | ſemiordinata. |
| 860 | 23 | *iunganti* | *iungenti* |
| 364 | 24 | DPMP | DCMP |
| 367 | 19 | CM | $CM^2$ |

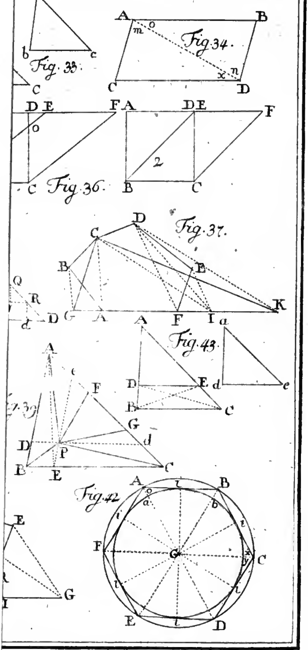



P. Mako. Geometr.

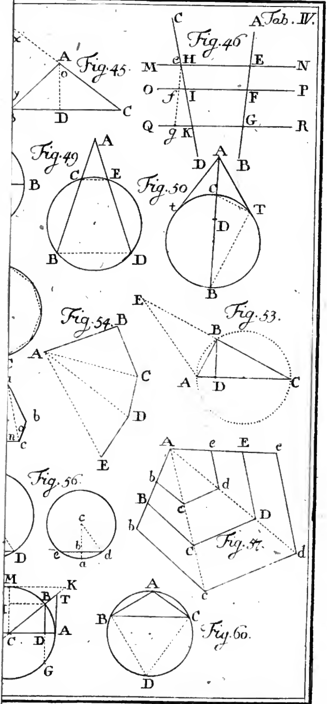



P. Mako Geometr

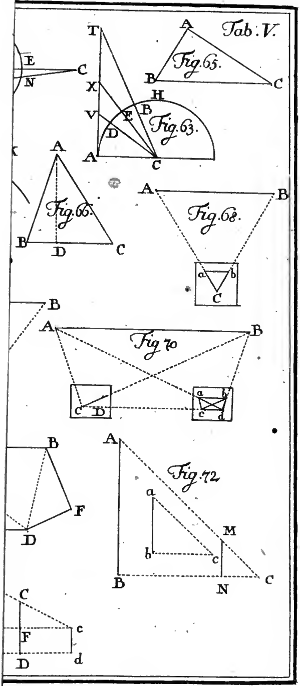
Tab. III.



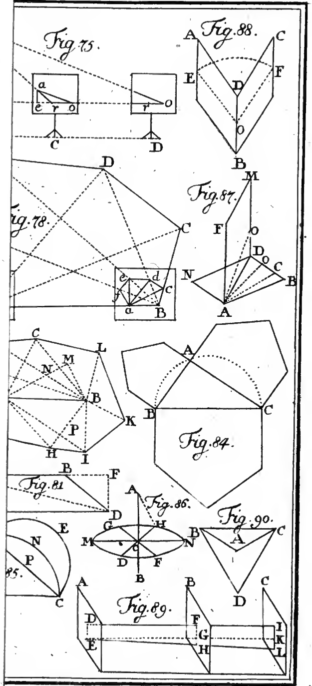

P. Mako Geom.




P. Mako Geometr.




P. Mako Geometr.




P. Mako Geom.

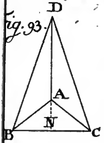


Fig. 93.

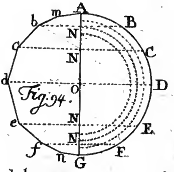


Fig. 94.

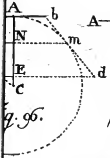


Fig. 96.

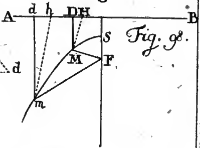


Fig. 98.



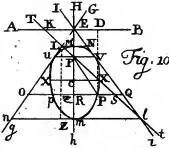


Fig. 100.

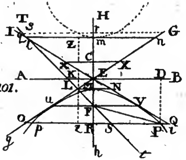
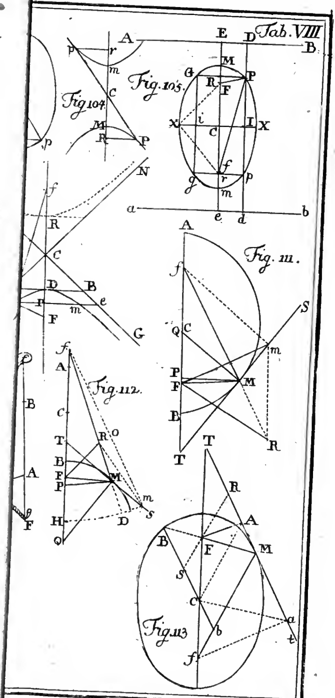
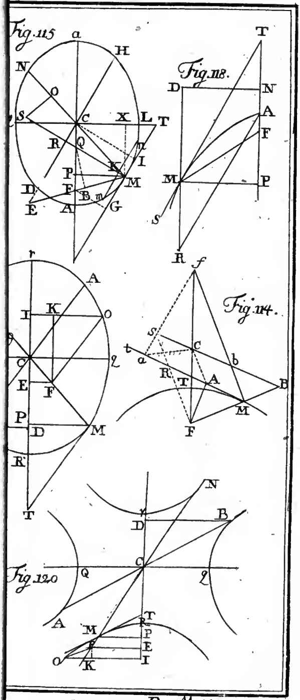


Fig. 101.

P. Mako. Geom.




P. Mako Geom.




P. Mako. Geom.

005655986

Digitized by Google

